SCIAMVS 12 (2011), 29-158

Le Livre XIV des Éléments *d'Euclide : versions grecques et arabes*

(première partie)

Bernard Vitrac
CNRS UMR 8210, ANHIMA Paris
bernard.vitrac@gmail.com

Ahmed Djebbar
Université des Sciences et Technologies de Lille
ahmed.djebbar@wanadoo.fr

N.B. : Cette étude était trop longue pour paraître dans une seule livraison de la revue *SCIAMVS*. Nous l'avons divisée en deux portions approximativement égales et la seconde partie (marquée en grisée dans la table ci-dessous) sera publiée dans le numéro suivant.

Table des matières

Introduction

Dans certains manuscrits grecs transmettant le texte des *Éléments* d'Euclide, on trouve non seulement les 13 Livres considérés comme (globalement) authentiques, mais aussi deux livres supplémentaires traditionnellement désignés comme Livres XIV et XV. On les trouve également dans de nombreux manuscrits arabes et latins des versions médiévales du traité et, par conséquent, dans pratiquement toutes les éditions et traductions non partielles[1] imprimées à la Renaissance. Beaucoup de lecteurs, au cours de l'histoire, ont ainsi connu un "Euclide" en 15 Livres.

Ces deux livres se rattachent au traité, en particulier à la dernière partie du Livre XIII (Proposition 13-18), par le thème partagé des solides réguliers. Le Livre XIV est consacré à la comparaison de l'icosaèdre et du dodécaèdre inscrits dans une même sphère quant à leurs surfaces et à leurs volumes. La plus sommaire description du contenu du Livre XV permet d'y distinguer trois sections[2], fort différentes par la taille et le style. L'intégrité dudit Livre ne va donc pas de soi.

Bien que cela ait été parfois perdu de vue — nous aurons l'occasion d'y revenir — il n'y a pas de doutes qu'il s'agisse là de portions inauthentiques, adjointes au traité d'Euclide au cours de sa transmission. Cinq arguments (forts) peuvent être invoqués :

1. Les titres et/ou les colophons des manuscrits grecs et de certaines versions arabes ou latines rattachent indiscutablement le Livre XIV, au moins quant à son inspiration initiale, au nom du mathématicien Hypsiclès d'Alexandrie (1^{ère} moitié du II^e siècle avant notre ère).
2. Ledit Livre s'ouvre par une lettre-préface que l'adjonction aux *Éléments* n'a pas (initialement) éliminée et qui indique un très probable changement d'auteur. En l'état actuel de notre connaissance de cette pratique dans la littérature mathématique grecque ancienne, elle implique très vraisemblablement une date postérieure à Archimède[3].
3. Le style d'écriture décidément non euclidien des sections (*ii*)-(*iii*) du Livre XV.

---

[1] À partir du XVI^e siècle, on édite aussi plusieurs versions limitées aux six, parfois neuf, premiers Livres, ou encore des épitomés des quinze livres contenant seulement les principes et les énoncés, sans les preuves.

[2] (*i*) *EHM,* V, 40.1— 48.15 Heiberg (= *EHS,* V, 1, 23.1—28.15), cinq problèmes relatifs à l'inscription mutuelle de deux polyèdres réguliers : 1. Inscrire une pyramide dans un cube donné ; 2. Inscrire un octaèdre dans une pyramide donnée ; 3. Inscrire un octaèdre dans un cube donné ; 4. Inscrire un cube dans un octaèdre donné ; 5. Inscrire un dodécaèdre dans un icosaèdre donné.
(*ii*) *EHM,* V, 48.16—50.16 Heiberg (= *EHS,* V, 1, 28.16—29.16), un premier ajout, très élémentaire, consacré au dénombrement des arêtes, puis des angles solides, que comporte chacun des cinq polyèdres réguliers.
(*iii*) *EHM,* V, 50.17— 66.16 Heiberg (= *EHS,* V, 1, 29.17—38.16), un second ajout concernant la détermination de l'inclinaison (κλίσις) d'une face sur une autre — ce que nous appellerions l'angle dièdre — dans quatre des cinq solides réguliers (le cas du cube est évident).
Les références complètes des ouvrages cités (ainsi que les abréviations désignant les éditions) se trouvent dans la bibliographie insérée à la fin de cette introduction.

[3] Sur cette pratique de la préface dans les traités mathématiques, voir [Vitrac, 2008a].

4. L'auteur de la troisième section du Livre XV — l'ajout concernant les angles dièdres des polyèdres réguliers — nous apprend que cette investigation avait été faite par son grand maître Isidore (ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατα μέγας διδάσκαλος). Il y a de bonnes raisons de croire que cet Isidore appartient à l'Antiquité tardive et il faut rapporter à cette époque la composition de cette section, voire du Livre XV en entier, si l'on en admet l'intégrité.
5. Plusieurs des descriptions ou des mentions antiques des *Éléments* d'Euclide (voir *infra,* § 7) qui nous sont parvenues attestent que l'ouvrage était en *13* Livres, pas en 15.

Dans l'article qui suit, nous reprenons l'ensemble du dossier concernant le Livre XIV, tant dans la tradition directe grecque que dans les traditions indirectes médiévales arabe et latine. Nous n'évoquerons le second livre additionnel que dans la mesure où sa prise en compte est pertinente pour nos discussions (datation, attribution, structure déductive du Livre XIV). Nous réservons son étude détaillée pour une publication ultérieure.

Pour commencer, nous rappelons sommairement les données de la tradition manuscrite grecque des Livres XIV et XV telles qu'elles ont été établies par Heiberg et les hypothèses qu'il en a tirées. Nous rapportons les rares informations que nous avons sur Hypsiclès d'Alexandrie. Puis nous présentons le contenu mathématique du Livre XIV et sa structure déductive. Un découpage raisonné en est proposé. Nous essayons ensuite de déterminer les motivations qui pouvaient être celles d'Hypsiclès, ses objectifs, quand il a rédigé sa monographie au II^e^ siècle avant notre ère, monographie qu'il nous paraît nécessaire de distinguer de la version adjointe bien plus tard (très probablement dans l'Antiquité tardive) aux *Éléments* d'Euclide (Livre XIV). Pour cela, nous revenons sur la fin du Livre XIII pour préciser les liens, réels ou fictifs, entre Hypsiclès et Euclide.

Ce premier parcours dans la tradition grecque et l'état du texte transmis soulèvent des problèmes d'authenticité. Pour les éclairer, sinon les résoudre, nous avons donc exploré la double tradition indirecte des témoignages ou citations en grec et des traductions médiévales arabes et arabo-latines. La première, après une incursion dans le Livre V de la *Collectio* de Pappus, tourne assez court, mais la prise en compte de la seconde, outre son intérêt intrinsèque évident, a fait ses preuves et elle a déjà considérablement enrichi les discussions d'authenticité concernant les Livres I à XIII. La comparaison des différentes versions des livres authentiques suggère que la recherche de complétude et le respect, au moins structurel, des modèles utilisés caractérisent la transmission *primaire,* c'est-à-dire la phase des premières traductions du grec à l'arabe.

L'idée qu'il en a été de même pour les Livres XIV-XV, au moins comme hypothèse de travail, paraît donc méthodologiquement acceptable ; d'autant, qu'en principe, deux évènements de l'histoire du texte des Livres I-XIII, sources probables de complication, devraient nous être épargnés ici :
• On sait qu'il a existé au moins deux versions du texte grec des Livres I à XIII, probablement davantage, celle, hellénistique, issue d'Euclide ou de son école (III^e^ s. avant notre ère), et la réédition produite par Théon d'Alexandrie vers 370.

• Par ailleurs au moins deux traductions arabes des mêmes Livres ont été réalisées, chacune, en outre, ayant été révisée, celle d'al-Hajjāj, par lui-même, celle d'Isḥāq ibn Hunayn, par Thābit ibn Qurra.

Ces deux données historiques sont souvent évoquées, à tort ou à raison, pour expliquer les nombreuses divergences que l'on peut observer quand on compare soit le (ou les) texte(s) grec(s) avec les traductions médiévales, soit lesdites traductions entre elles.

Mais, si l'adjonction des Livres XIV-XV appartient à l'Antiquité tardive, il n'y a, *a priori,* aucune raison de penser qu'on ait produit plusieurs éditions antiques de leur texte grec. Quant à la tradition indirecte, plusieurs spécialistes sont convaincus qu'il y a eu un *seul* traducteur des livres additionnels : Qusṭā Ibn Lūqā, indiscutablement mentionné comme tel dans les manuscrits. S'il y eut une seule édition du texte grec et une unique traduction arabe des Livres XIV-XV, on peut espérer une homogénéité des versions, grecques, arabes ou latines desdits Livres, bien plus grande que celle, très relative, que l'on observe dans les Livres authentiques. Nous proposons donc un inventaire de la tradition indirecte médiévale des livres additionnels, puis nous reprenons les récits de l'origine desdits Livres selon les érudits arabes.

À la suite de cette Présentation, le lecteur trouvera le texte grec du Livre XIV tel qu'il a été établi par J.L. Heiberg, accompagné d'une traduction française. Plutôt que de donner un commentaire cursif complet, nous avons préféré inclure le texte des scholies grecques contenues dans deux des manuscrits de base de l'édition critique, ainsi que leur traduction, parce qu'elles constituent précisément un tel commentaire élémentaire sur la partie "démonstration" des Propositions. À leur suite, nous avons ajouté quelques notes complémentaires lorsque cela était requis soit pour la compréhension du raisonnement mathématique, soit pour discuter quelques problèmes textuels très ponctuels.

Viennent alors les éditions et traductions françaises de deux versions arabes du Livre XIV. Nous ne prétendons pas offrir un traitement exhaustif et définitif, d'autant que la partie médiévale de ce dossier est encore peu explorée. La suite même de notre étude montre que les deux branches principales de la tradition indirecte que nous distinguons n'épuisent pas la richesse des traditions arabes et arabo-latines. Deux constatations très importantes s'imposent à partir de notre étude :

1) Si la substance mathématique de nos trois versions est sensiblement la même et si on peut admettre la relative homogénéité de la tradition directe grecque, ce n'est pas le cas de la tradition indirecte des versions arabes, quelle que soit l'explication qu'il faille en donner (traducteurs différents, intervention d'une version remaniée au cours de la transmission …). D'où les deux versions que nous proposons à notre lecteur, l'une dite de la famille du manuscrit Téhéran (Malik) 3586, l'autre du manuscrit Rabat (Hasaniyya) 1101. On constatera aisément qu'elles ne sont pas philologiquement réductibles l'une à l'autre au sein d'un même apparat critique et qu'il y a donc nécessité de les éditer séparément.

2) La comparaison entre traditions directe grecque et indirecte médiévale, tant au niveau global des variantes structurelles qu'à celui des divergences locales, montre que la grande dichotomie qui a été observée dans les Livres I à XIII[4] est à la fois conservée dans les grandes lignes et déplacée. Conservée car, pour le Livre XIV aussi, on observe encore l'opposition entre deux versions du texte, l'une relativement "laconique", l'autre passablement enrichie. Mais déplacée car, si pour les Livres authentiques c'est le texte grec qui constituait le témoin amplifié, le clivage, pour le Livre XIV, passe à l'intérieur de la tradition indirecte arabe au sein de laquelle on trouve une famille textuelle — celle du manuscrit Rabat 1101 — plutôt "laconique" et étonnement proche du texte grec, qu'il faut distinguer de celle de la famille Téhéran 3586, laquelle semble procéder d'une version remaniée et enrichie.

Notre troisième et dernière partie est consacrée à la confrontation des traditions directe et indirecte. Grâce à quelques variantes structurales faciles à identifier, nous précisons les éléments du clivage évoqué ci-dessus. L'une d'elles nous contraindra à une petite excursion dans le Livre XV de la tradition arabe, sa première Proposition n'étant en fait qu'un lemme qui devait être ajouté à la fin du Livre XIV. La comparaison détaillée des textes grecs et arabes est, pour l'essentiel, réalisée sous la forme d'une mise en parallèle de trois traductions françaises qui — pour faciliter les problèmes matériels de disposition tabulaire — constitue le (long) Tableau 4 de l'annexe. Le recours à des traductions masque évidemment des rapprochements ou des écarts que la comparaison directe du grec et de l'arabe mettrait en évidence. Mais celle-ci n'aurait été accessible qu'aux bienheureux (mais peu nombreux) connaisseurs des deux langues. Le choix n'est donc pas parfait, mais permettra toutefois d'établir sans contestation la proximité de la version du manuscrit de Rabat et du texte grec de la famille de manuscrits ***PBVv***[5], les spécificités du texte de la famille du Téhéran 3586.

Petite complication : le (ou les) responsable(s) de la version arabe du manuscrit Rabat 1101 a (ont) eu accès à un texte grec davantage proche de celui de cette famille que de celui du manuscrit ***M***. Sa comparaison avec le texte édité par Heiberg — qui dépend fortement de ***M*** — montre qu'il est souvent d'une qualité moindre que ce dernier. Aussi, bien que nous ayons aussi établi ce texte afin de le traduire et d'introduire cette traduction dans notre Tableau 4, nous n'avons pas cru utile d'en donner l'édition[6]. D'un autre côté, utiliser la traduction française du texte édité par Heiberg que nous donnons en II, A, § 3 dans ledit Tableau aurait conduit à alourdir considérablement des notes infrapaginales

[4] Nous nous permettons de renvoyer à une précédente étude dans laquelle le lecteur trouvera des informations bibliographiques et une étude de cas portant sur le Livre X : [Rommevaux, Djebbar, Vitrac, 2001]. Voir aussi [Vitrac, à paraître].

[5] Pour la description des manuscrits grecs et des sigles utilisés, voir *infra,* II, A, § 1. Pour celle des manuscrits arabes, voir *infra,* II, B, § 1.

[6] Le lecteur pourra s'en faire une idée en se reportant au texte grec établi dans [Peyrard, 1818] même si, vérifications faites, Peyrard (ou l'édition antérieure d'Oxford qu'il suit parfois) introduit des corrections par rapport aux leçons des manuscrits.

déjà fournies pour justifier les écarts, de fait apparents, entre le grec et la version Rabat 1101. Cela dit, le lecteur n'oubliera pas que nos deux traductions du grec ne sont donc pas identiques. Cette façon de faire a aussi l'avantage de permettre au lecteur non helléniste de saisir la portée (relativement limitée) des écarts entre les textes grecs de ***M*** et ***PBVv***.

À partir de la dichotomie observée à l'intérieur de la tradition indirecte arabe, nous pourrons également évaluer un certain nombre de versions arabo-latines, notamment celles attribuées à Adélard de Bath et à Gérard de Crémone, ainsi qu'une rédaction compacte des livres additionnels contenue dans l'un des deux manuscrits de la version dite gréco-latine des *Éléments,* rédaction que son "inventeur", J. Murdoch, et son éditeur, H.L.L. Busard, appellent *compendium*. Nous achevons notre étude du Livre XIV en évoquant brièvement sa postérité dans les recensions du XIII^{e} siècle.

Remerciements

Des portions de cet article ont été présentées dans différents Séminaires d'histoire des sciences, celui de Lille III-Lille I, organisé par Fabio Acerbi et Bernard Vitrac, les 01 Mars (Bernard Vitrac, *Le Livre XIV des Éléments ajouté par Hypsiclès* : (i) tradition grecque) et 30 Mars 2006 (Ahmed Djebbar, *Le Livre XIV des Éléments ajouté par Hypsiclès* : (ii) tradition médiévale), le Séminaire « Histoire de géométries » de l'EHESS, coordonné par Dominique Flament et Philippe Nabonnand (02 Mars 2009, Bernard Vitrac, *Les Livres additionnels (XIV-XV) aux* Éléments *: ce qu'ils peuvent nous apprendre sur l'histoire de la transmission du traité d'Euclide*) et le Séminaire du SYRTE « *Qu'appelle-t-on les débuts de la science classique ?* » organisé par Michel Blay et Michela Malpangotto (25 Janvier 2011, Bernard Vitrac, *Le traitement des polyèdres réguliers dans la tradition des Éléments d'Euclide de l'Antiquité tardive à la Renaissance*). Que leurs organisateurs et tous les participants à ces stimulantes réunions en soient ici remerciés.

Nous avons également sollicité un certain nombre de collègues sur des points très précis : la très intéressante tradition hébraïque, les scholies du manuscrit ***P*** (surtout celles de la seconde main, que nous ne parvenions pas à déchiffrer), le cercle savant d'al-Kindī, la préface du compendium … Ils ont toujours accepté de nous répondre et nous ont ainsi permis d'améliorer et de compléter ce travail de manière significative. Nous les en remercions chaleureusement, tout particulièrement Fabio Acerbi, Rüdiger Arnzen, Sonia Brentjes, Gregg de Young, Elaheh Kheirandish, Tzvi Langermann, Tony Lévy, Brigitte Mondrain, Sabine Rommevaux, Nicolas Vinel.

Enfin nous remercions notre collègue Ken Saïto pour tout le travail qu'il a fourni sur cet article, ses conseils et suggestions, sa patience. En outre, il a accepté de re-dessiner tous les diagrammes géométriques des différentes versions du Livre XIV que nous publions, à l'aide du logiciel DraFT qu'il a lui-même développé.

Abréviations et références bibliographiques

Les titres des écrits des auteurs grecs sont abrégés selon les conventions de l'*Année philologique* ; la pagination est celle des éditions de référence. Les références aux commentateurs d'Aristote sont données selon la série *Commentaria in Aristotelem Graeca.* Certaines sources anciennes ou médiévales, fréquemment citées, le sont selon les *sigla* suivants, suivis par le numéro du volume et par l'indication « page.lignes », par exemple : « *EHS*, I, 114.12-14 » pour [Euclide-Heiberg-Stamatis, 1969-1977], volume I, page 114, lignes 12-14.

(*Ad. I*) = [Adélard-Busard, 1983]
The first Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath. Ed. H.L.L. Busard. Toronto, Pontifical Institute of Mediaeval Studies, 1983.

(*Gr.-lat.*) = [Busard, 1987]
The Mediaeval Latin Translation of Euclid's Elements *made directly from the Greek.* Ed. H.L.L. Busard. Stuttgart, Franz Steiner, 1987.

(*Camp.*) = [Campanus-Busard, 2005]
H. L. L. Busard, *Campanus of Novara and Euclid's* Elements. Stuttgart, Franz Steiner Verlag, 2005.

EHM = [Euclide-Heiberg-Menge-Curtze, 1883-1916]
Euclidis opera omnia, ed. I.L. Heiberg & H. Menge, Lipsiae, in aed. B.G. Teubner :
I. *Elementa* i-iv (1883); II. *El*. v-ix (1884) ; III. *El*. x (1886) ; IV. *El*. xi-xiii (1885); V. *El*. xiv-xv, *Scholia, Prolegomena critica* (1888); VI. *Data, Marini Commentarius in Eucl. Data* (1896) ; VII. *Optica, Opticorum recensio Theonis, Catoptrica* (1895) ; VIII. *Phaenomena, Scripta musica, Fragmenta* (1916) ; IX. *Supplementum.*

EHS = [Euclide-Heiberg-Stamatis, 1969-1977]
Euclidis Elementa, post Heiberg ed. E.S. Stamatis, Leipzig, B.G. Teubner. I. *El*. i-iv (1969) ; II. *El*. v-ix (1970) ; III. *El*. x (1972) ; IV. *El*. xi-xiii (1973) ; V,1. *El*. xiv-xv, *Scholia in lib.* i-v (1977) ; V, 2. *Scholia in lib.* vi-xiii (1977).

(*GC*) = [Gérard de Crémone-Busard, 1984]
The Latin translation of the Arabic version of Euclid's Elements commonly ascribed to Gerard of Cremona. Ed. H.L.L. Busard. Leiden, E.J. Brill, 1984.

(*JT*) = [John of Tynemue-Busard, 2001]
Johannes de Tinemue's Redaction of Euclid's Elements, The so-called Adelard III Version. Ed. H.L.L. Busard. Stuttgart, Franz Steiner, 2001.

(*Papp. Coll.*) = [Pappus-Hultsch, 1876-1878]
Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt, e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit F. Hultsch. 3 vols. Berlin, Weidmann 1876-78: I. Lib. II-V, rel.; II. Lib. VI-VII, rel.; III. 1: Lib. VIII, rel., schol. suppl.; III. 2 : Indices (reprint ed.: Amsterdam, Hakkert 1965).

(*Pr*) = [Proclus-Friedlein, 1873]
Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii, ex recognitione G. Friedlein, Leipzig, B. G. Teubner 1873.

(*RC*) = [Robert de Chester-Busard-Folkerts, 1992]
Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's Elements *the so-called Adelard II Version.* Ed. H.L.L. Busard et M. Folkerts. Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser Verlag, 1992.

Autres éditions et traductions

[Acerbi, Vinel, Vitrac, 2010]
F. Acerbi, N. Vinel et B. Vitrac, Les Prolégomènes à l'*Almageste.* Une édition à partir des manuscrits les plus anciens : Introduction générale—Parties I-III. *SCIAMVS* 11 (2010), pp. 53-210.

[Achille Tatius-Maass, 1898]
Commentariorum in Aratum Reliquiæ. E. Maass (ed.). Berlin, Weidmann, 1898.

[al-Masᶜūdī- Pellat, 1965-1979]
al-Masᶜūdī, *Murūj adh-dhahab* [Les Prairies d'or], Ch. Pellat (édit), Beyrouth, Université libanaise, 1965-1979.

[Archimède-Heiberg, 1910-1915]
Archimedis opera omnia, cum commentariis Eutocii, iterum edidit J. L. Heiberg, 3 vol., Leipzig, B. G. Teubner, 1910-1915.

[Autolycos-Aujac, 1979]
G. Aujac (ed.), Autolycos de Pitane. Paris, Les Belles Lettres, 1979.

[Busard, 1996]
A Thirteenth-Century Adaptation of Robert of Chester's Version of Euclid's Elements. H. L. L. Busard. Institut für Geschichte der Naturwissenschaften. München, 1996.

[De Young, 2008]
G. De Young, Book XVI : A Mediæval Arabic Addendum To Euclid's *Elements. SCIAMVS* 9 (2008), pp. 133-209.

[Diophante-Tannery, 1893-1895]
Diophanti Alexandrini opera omnia cum Graeciis commentariis, edidit et latine interpretatus est P. Tannery, 2 vol., Leipzig, B.G. Teubner, 1893-1895.

[Euclide-Gregory, 1703]
ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΩΜΕΝΑ. Euclidis quæ supersunt omnia. Ex recensione Davidis Gregorii. Oxioniæ, E Theatro Sheldoniano, 1703.

[Euclide- Grynée, 1533]
S. Grynaeus (ed.), *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝΟΥ–ΣΙΩΝ …* Basileæ apud IOAN. HERVAGIUM. ANNO M.D.XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

[Euclide-Peyrard, 1814-1818]
Les œuvres d'Euclide en grec, en latin et en français d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours. Par F. Peyrard. Trois volumes. Paris, chez C.F. Patris, 1814, 1816, 1818.

[Euclide-Vitrac, 2001]
Euclide d'Alexandrie, *Les Eléments,* Volume 4. Traduction et commentaires des Livres XI à XIII par Bernard Vitrac. Paris, PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences, 2001.

[Hājjī Khalīf-Flügel, 1835–1858]
Hājjī Khalīfā, *Kashf az-zunun ᶜan asāmī al-kutub wa l-funūn* [La dissipation des doutes sur les noms des livres et des arts], G. L. Flügel (édit.), Leipzig, 1835–1858.

[Héron-Heiberg, 1914]
Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia. Volumen V. Heronis quae feruntur Stereometrica et De mensuris, edidit J. L. Heiberg (1914), Leipzig, B. G. Teubner.

[Hypsikles-De Flaco & Krause, 1966]
Hypsikles, *Die Aufgangszeiten der Gestirne*. Herausgegeben und übersetzt von V. De Falco und M. Krause, mit einer Einführung von O. Neugebauer. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Philologisch-Historische Klasse, Dritte Folge, Nr. 62. Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht 1966.

[Ibn Khaldūn-Cheddadi, 2002]
Ibn Khaldūn, *Muqaddima*, A. Cheddadi (trad.), Paris, Gallimard, 2002.

[al-Maghribī-Hogendijk, 1993]
J.P. Hogendijk, An Arabic Text on the Comparison of the Five Regular Polyhedra: “Book XV” of the *Revision of the Elements* by Muhyī al-Dīn al-Maghribī. *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* 8 (1994), pp. 133-233.

[Michaux, 1947]
M. Michaux, *Le Commentaire de Marinus aux* Data *d’Euclide*. Étude critique. Université de Louvain, Recueil de travaux d’Histoire et Philosophie, 3ème série, fasc. 25. Louvain, Bibliothèque de l'université 1947.

[Pappus-Ver Eecke, 1982]
Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique,* œuvre traduite pour la première fois du grec au français avec une introduction et des notes par P. Ver Eecke. 2 vol. Bruges, Desclée de Brouwer, réimpression Paris, A. Blanchard, 1982.

[Pappus-Jones, 1986]
Pappus of Alexandria, *Book 7 of the Collection*. Edited with Translation and Commentary by Alexander Jones, 2 vols. New York/Berlin/Heidelberg/Tokyo, Springer-Verlag 1986.

[Ptolémée-Heiberg, 1898-1903]
Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia. Vol. I. Syntaxis mathematica, edidit J. L. Heiberg. 1 vol. in 2 parties. Leipzig, B. G. Teubner, 1898-1903.

[Ibn al-Qifṭī-Lippert, 1903]
Ibn al-Qifṭī, *Ikhbār al-‘ulamâ’ bi akhbār al-hukamā’* [Livre qui informe les savants sur la vie des sages], Julius Lippert (édit.), Leipzig, Dietrich’sche Verlagsbuchhandlung, 1903.

[Théon-Mogenet-Tihon, 1985]
J. Mogenet, *Le “Grand Commentaire” de Théon d’Alexandrie aux Tables Faciles de Ptolémée*. *Livre I.* Histoire du texte, édition critique, traduction revues et complétées par A. Tihon. Commentaire par A. Tihon. Studi e Testi 315. Roma, Biblioteca Apostolica Vaticana 1985.

[Théon-Rome, 1936]
Commentaires de Pappus et de Théon d’Alexandrie sur l’Almageste. Texte établi et annoté par A. Rome. *Tome II* : Théon d’Alexandrie, *Commentaire sur les livres 1 et 2 de l’Almageste*, Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana, Studi e Testi 72, 1936.

[Vettius Valens-Kroll, 1908]
Vettii Valentis anthologiarum libri. W. Kroll (ed.). Berlin, Weidmann, 1908.

Autres ouvrages et articles

[Abattouy, 2007]
M. Abattouy, La tradition arabe de *Maqāla fī 'l-mīzān* : un traité sur la théorie du levier attribué à Euclide. *Mirror of Heritage (Ayene-ne Miras),* New Series Vol. 4 (35), 2007, pp. 67-104.

[Brentjes, 2001]
S. Brentjes, Observations on Hermann of Carinthia's Version of the *Elements* and its Relations to the Arabic Transmission. *Science in Context* 14 (2001), pp. 39-84.

[Bretschneider, 1870]
C.A. Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides.* Leipzig, B.G.Teubner 1870. Réimp. Wiesbaden, Sandig, 1968.

[*Codices* …, 1923]
Codices Vaticani graeci. Recensuerunt I. Mercati et P. Franchi de' Cavalieri. Tomus I, Codices 1-329. Roma, Biblioteca Apostolica Vaticana 1923.

[Crönert, 1906]
W. Crönert, Kolotes und Menedemos. Texte und Untersuchungen zur Philosophen- und Literaturgeschichte. Coll. « Studien zur Paleographie und Papyruskunde », 6. Leipzig, E. Avenarius, 1906.

[De Young, 1991]
G. De Young, New Traces of the Lost al-Hajjāj Arabic Translations of Euclid's *Elements. Physis* 28 (1991), pp. 647-666.

[De Young, 2004]
G. De Young, The Latin Translation of Euclid's Elements Attributed to Gerard of Cremona in Relation to the Arabic Transmission. *Suhayl* 4 (2004), pp. 311-383.

[Decorps-Foulquier, 2000]
M. Decorps-Foulquier, *Recherches sur les* Coniques *d'Apollonios de Pergé et leurs commentateurs grecs*. Paris, Klincksieck 2000.

[Djebbar, 1996]
A. Djebbar, Quelques Commentaires sur les Versions arabes des *Eléments* d'Euclide et sur leur Transmission à l'Occident Musulman. In M. Folkerts (ed.), *Mathematische Probleme im Mittelalter. Der lateinische und arabische Sprachbereich*. Wiesbaden, Otto Harrassowitz Verlag, 1996, pp. 91-114.

[Djebbar, 2003]
A. Djebbar, Quelques exemples de scholies dans la tradition arabe des *Éléments* d'Euclide. *Revue d'Histoire des Sciences* 56 (2003), pp. 293-321.

[Djebbar, 2008].
A. Djebbar, Quelques remarques sur les définitions du Livre XI des *Éléments* d'Euclide dans la tradition arabe. *In Mathematics Celestial and Terrestrial.* Festschrift für Menso Folkerts zum 65. Geburstag. J.W. Dauben, S. Kirschner, A. Kühne, P. Kunitzsch, R.P. Lorch (eds). Halle, *Acta Historica Leopoldina* 54 (2008), pp. 361-377.

[Dorandi, 1994a]
T. Dorandi, Notice « Basilide le Syrien » dans *Dictionnaire des philosophes antiques,* Vol. II: Babélyca d'Argos à Dyscolius, R. Goulet (éd.). Paris, CNRS Éditions, 1994, p. 91.

[Dorandi, 1994b]
T. Dorandi, Notice « Démétrios Lacon » dans *Dictionnaire des philosophes antiques,* Vol. II: Babélyca d'Argos à Dyscolius, R. Goulet (éd.). Paris, CNRS Éditions, 1994, pp. 637-641.

[Dorandi, 2000]
T. Dorandi, *Le stylet et la tablette. Dans le secret des auteurs antiques.* Paris, Les belles Lettres, 2000.

[Endress, 1997]
G. Endress, The Circle of Al-Kindī. Early Arabic Translations from the Greek and the Rise of Islamic Philosophy. *In* G. Endress, R. Kruk (eds.), *The Ancient Tradition in Christian and Islamic Hellenism*. Research School CNWS, Leiden 1997, pp. 43-76.

[Friedlein, 1873]
G. Friedlein, De Hypsicle mathematico. *Bolletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* VI*,* 1873, pp. 493-529.

[Heiberg, 1882]
J.L. Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*. Leipzig, B.G. Teubner 1882.

[Heiberg, 1903]
J.L. Heiberg, Paralipomena zu Euklid. *Hermes* 38 (1903), pp. 46-74, 161-201, 321-356.

[Herz-Fischler, 1988]
R. Herz-Fischler, Theorem XIV,** of the First supplement to the *Elements. Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 38 (1988), pp. 3-66.

[Hogendijk & Langermann, 1984]
J.P. Hogendijk & Y.T. Langermann, A Hitherto Unknown Hellenistic Treatise on the Regular Polyedra. *Historia Mathematica* 11 (1984), pp. 325-326.

[Kapp, 1934-1936/1997]
A.G. Kapp, Arabische Übersetzer und Kommentatoren Euklids, sowie deren math.-naturwiss. Werke auf Grund des Ta'rīkh al-Hukamā' des Ibn al-Qiftī. *Isis* 22 (1934-1935), pp. 150-172; 23, 1935, pp. 54-99; 24, 1935-1936, pp. 37-79.
Reproduit dans Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science. F. Sezgin (ed), avec la collaboration de M. Amawi, C. Ehrig-Eggert & E. Neubauer. *Islamic Mathematics and Astronomy,* Vol. 19, 1997, pp. 8-121.

[Klamroth, 1881]
M. Klamroth, Die arabische Tradition der Elemente Euklid's. *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft* 35 (1881), pp. 270-326, 788.
Reproduit dans Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science. F. Sezgin (ed), avec la collaboration de M. Amawi, C. Ehrig-Eggert & E. Neubauer. *Islamic Mathematics and Astronomy,* Vol. 17, 1997, pp. 272-328.

[Knorr, 1996]
W.R. Knorr, The Wrong Text of Euclid: On Heiberg's Text and its Alternatives, *Centaurus* 38 (1996), pp. 208-276.

[Lévy, 1997]
T. Lévy, Les *Éléments* d'Euclide en hébreu (XIII^e-XVI^e siècles). *In* A. Hasnawi, A. Elamrani-Jamal, M. Aouad (eds.), *Perspectives arabes et médiévales sur la tradition scientifique et philosophique grecque*. Leuven-Paris, Peeters 1997, pp. 78-94.

[Loget, 2004]
F. Loget, La Ramée critique d'Euclide. Sur le *Prœmium mathematicum* (1567). *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 54 (2004), pp. 3-28.

[Montucla, 1798]
J. F. Montucla, *Histoire des mathématiques*, 2e édition, tome I, Paris, H. Agasse, An VII (1798-99)

[Murdoch, 1966]
J.E. Murdoch, Euclides Graeco-Latinus: A Hitherto Unknown Medieval Latin Translation of the elements Made Directly from the Greek. *Harvard Studies in Classical Philology* 71 (1966), pp. 249-302.

[Ramus, 1569]
Petrus Ramus, *Scholarum mathematicarum libri unus et triginta.* Bâle, 1569. Réimpression, Hildesheim, Georg Olms Verlag, 2008.

[Rommevaux, Djebbar, Vitrac, 2001]
S. Rommevaux, A. Djebbar et B. Vitrac, Remarques sur l'Histoire du Texte des *Éléments* d'Euclide. *Archive for History of Exact Sciences* 55 (2001), pp. 221-295.

[Sezgin, 1974]
F. Sezgin, *Geschichte des Arabischen Schrifttums*. Band V, Mathematik bis ca. 430 H. Leiden, E.J. Brill 1974.

[Tannery, 1879]
P. Tannery, A quelle époque vivait Diophante. *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, III (1879), pp. 261-269.
Reproduit in P. Tannery, *Mémoires Scientifiques*, tome I (1912), n° 6, pp. 62-73.

[Tannery, 1884]
P. Tannery, Eutocius et ses contemporains. *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VIII (1884), pp. 315-329.
Reproduit in P. Tannery, *Mémoires Scientifiques*, tome II (1912), n° 36, pp. 118-136.

[Toomer, 1985]
G.J. Toomer, Galen on the Astronomers and Astrologers. *Archive for History of Exact Sciences* 32 (1985), pp. 193-206.

[Vitrac, 2004]
B. Vitrac, A Propos des Démonstrations Alternatives et Autres Substitutions de Preuves Dans les *Éléments* d'Euclide. *Archive for History of Exact Sciences* 59 (2004), pp. 1-44.

[Vitrac, 2008a]
B. Vitrac, Promenade dans les préfaces des textes mathématiques grecs anciens. *In* P. Radelet-de-Grave (ed.), *Liber amicorum Jean Dhombres*. Turnhout, Brepols 2008, pp. 9-46.

[Vitrac, 2008b]
B. Vitrac, Les formules de la 'puissance' (δύναμις, δύνασθαι) dans les mathématiques grecques et dans les dialogues de Platon. *In DYNAMIS. Autour de la puissance chez Aristote.* Textes réunis par M. Crubellier, A. Jaulin, D. Lefèbvre, P.-M. Morel. Collection Aristote, Traductions et Études. Leuven — Paris — Dudley, MA: Éditions Peeters, 2008, pp. 73-148.

[Vitrac, à paraître]
B. Vitrac, The Euclidean Ideal of Proof in *The Elements* and Philological Uncertainties of Heiberg's Edition of the Text. *In* K. Chemla (ed.), *History and Historiography of Mathematical Proof in Ancient tradition. Vol. I. The 19th Century Historiography of Mathematical Proof*. Cambridge, Cambridge University Press, in press.

PRESENTATION DES TRADITIONS DIRECTE ET INDIRECTE DES LIVRES ADDITIONNELS

1. La tradition directe des manuscrits byzantins

Dans certains manuscrits grecs transmettant le texte des *Éléments* d'Euclide, on trouve non seulement les 13 Livres considérés comme (globalement) authentiques, mais aussi deux livres supplémentaires traditionnellement désignés comme Livres XIV et XV. On les trouve également Le Tableau 1 de l'*ANNEXE* décrit sommairement les manuscrits grecs antérieurs au XVe s. contenant les *Éléments* jusqu'à leur fin supposée, même si certains sont mutilés en leur début, soit une vingtaine de copies[1], auxquelles deux sont ajoutées, l'une transmettant le Livre XIV (***M***), l'autre une partie du Livre XV (***m***).

• Plusieurs situations se présentent, dont les deux plus communes sont :

1) des manuscrits comprenant les Livres I à XIII, ou bien seuls (***S, p, q, r***, *Marcian. Gr.* 300), ou bien avec d'autres écrits (***b***, *Vatican. gr.* 192, *Fir. Med. Laur.* 28.01, *Mutin. Bibl. Est. e Univ. Gr.* 56), mais *sans* les Livres XIV-XV. Soit un total de 9 *codices* pour la période considérée.
2) des manuscrits présentant les livres I à XV sans solution de continuité, ou bien seuls (***B***, *Oxford, Bodl. Savile 13*), ou bien avec d'autres écrits (***F, V, v, f, λ***, *Parisin. Gr.* 2342).

Il y a donc à peu près parité et cette seconde famille construit donc bien un traité en 15 Livres, sans toutefois éliminer la préface d'Hypsiclès au début du Livre XIV. Le plus ancien manuscrit de cette catégorie, (***B***), est l'un des deux codices conservés du IXe s., copié en 888 pour Aréthas. Au verso du folio 370, on lit, à la fin des *Éléments* :

> « des *Éléments* d'Euclide dans l'édition de Théon, 13 »,

puis, au recto du folio suivant, le titre :

> « Ὑψικλέους τὸ εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενον » (d'Hypsiclès, le livre ajouté à Euclide)[2].

À la fin du Livre XIV (f° 380), un trait le sépare d'une figure (celle de XV 1) suivi d'un simple : « Εὐκλείδου ιε̂ » (d'Euclide, XV)[3]. À noter qu'ici le premier Livre additionnel n'est pas numéroté XIV, contrairement à ce que l'on trouve dans d'autres manuscrits :

[1] Nous utilisons pour cela le *Conspectus Siglorum* de Heiberg, répété dans le Tableau 1 de l'ANNEXE.
[2] Le même titre se trouve également dans les mss ***P, v, λ*** ("τό" omis), ***l***.
[3] Le même titre se trouve également dans ***Vv***. Les titres dans le précieux manuscrit ***F*** sont identiques à ceux de ***V***, mais cela tient à ce que cette copie, très abîmée, a été restaurée au XVIe s. (***Φ***) à partir du Laur. 28.06 (**f**), lui-même une copie de ***V***. Et cela vaut en particulier pour toute la fin du manuscrit.

« τὸ εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενον ῑδ ʼΥψικλέους » (au début du Livre XIV, dans ***M***, f°234r)
« Εὐκλείδου ῑδ. ʼΥψικλέους τὰ εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενα » (même lieu dans ***V***, f°246r) ;
« ʼΥψικλέους τὸ εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενον ῑδ » (à la fin du Livre XIV, dans ***P***, f°288r).

• L'autre copie du IXe s., le célèbre *Vatican. Gr.* 190 (***P***), probablement le plus ancien manuscrit complet des *Éléments* conservé, présente une situation légèrement différente. Certes il contient lui aussi les Livres additionnels, mais ils se trouvent séparés des *Éléments* par l'introduction de Marinus aux *Data* et par les *Data* elles-mêmes[4]. De plus, en tête du Livre XV (f° 288v), on trouve le titre pour le moins étonnant (qui contredit celui qui le précède au recto et rappelé ci-dessus) : « ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΙΔ » (d'EUCLIDE XIV) !

On peut envisager *a priori* (au moins) trois hypothèses :
H_1 — il s'agit simplement d'une erreur du copiste.
H_2 — Les Livres XIV et XV n'ont pas été adjoints simultanément, mais séparément. Il aurait existé des copies ayant, comme livre supplémentaire, une partie (au moins) de ce qui est notre actuel Livre XV, sans le livre d'Hypsiclès. Dans ***P*** (ou son modèle, puis ses descendants ?), on aurait oublié de corriger le numéro en question après l'insertion dudit livre.
H_3 — Il s'agit d'une (problématique) identification d'"auteur". Le Livre XIV étant clairement attribué par les manuscrits, le Livre XV étant dépourvu de préface et d'attribution, on l'aura rattaché à Euclide, par contraste avec le précédent, en prenant soin de ne pas compter celui rapporté à Hypsiclès.

H_1 est peu probable. Selon Heiberg, on trouve le même "14" chez Georgio Valla[5]. On peut remarquer que c'est aussi le cas dans la traduction gréco-latine (1505) de Bartholomeo Zamberti[6]. H_2 est séduisante, mais, à notre connaissance, aucun manuscrit grec portant les *Éléments* et le seul Livre XV en tant que livre additionnel n'a été identifié. Enfin H_3 prend l'exact contre-pied de ce qu'ont pensé les savants arabes, puis une grande partie de la tradition : l'absence de préface au Livre XV conduisit en effet à attribuer les *deux* Livres additionnels au même auteur, Hypsiclès, parfois à fusionner en

---

4 La situation est similaire dans le Laur. 28. 02 (***l***), à ceci près que l'introduction de Marinus n'y figure pas. Au demeurant, à partir des *Data,* ce manuscrit est, selon Heiberg, une copie de ***P***. Voir [Heiberg, 1903], p. 323.

5 [Heiberg, 1882], p. 155.

6 Au début de son livre XV (le titre dit seulement « Liber » et l'exemplaire que nous avons consulté n'est pas paginé !), on lit :

> « Euclidis accutissimi mathematici elementorum Liber *quartusdecimus &* solidorum *quartus* ex traditione hypsiclis Alexandrini philosophi preclarissimi Bartholomeo Zamberti Veneto interprete » (D'Euclide, le plus pénétrant des mathématiciens, Livre *quatorze* des Éléments et *quatrième* des solides selon l'enseignement du philosophe Hypsiclès d'Alexandrie dans la traduction de l'illustre Bartholomeo Zamberti de Venise), alors qu'il avait conclu à la page précédente :

> « Hypsiclis philosophi eximii in quartumdecimum Euclidis elementorum uolumen traditionis finis Bartholomeo Zamberti Veneto interprete » !

une seule entité textuelle les deux Livres additionnels[7] ce qui, du point de vue de l'auctorialité, revient à peu près au même.

- le manuscrit ***M*** transmet le Livre XIV, conjointement avec le commentaire de Proclus au premier Livre d'Euclide, mais sans les *Éléments* eux-mêmes, ni le Livre XV.
- l'existence du manuscrit ***m*** suggère que la troisième partie[8] du Livre XV a pu être transmise indépendamment du reste.

Il n'y a guère d'ambiguïté dans la tradition des manuscrits grecs : le Livre XIV est rattaché à Hypsiclès et il a été ajouté à Euclide. On ne dit pas qu'il a été ajouté *par* Hypsiclès. Aucune connexion n'est établie entre le Livre XV et Hypsiclès, sinon la simple consécution XIV / XV, ni dans les titres et colophons des manuscrits, ni dans le texte même dudit Livre. On doit cependant remarquer le parallélisme des titres des deux Livres additionnels dans le manuscrit ***V*** (« Εὐκλείδου ῑδ ...; Εὐκλείδου ῑε̄ ») et surtout le pluriel, « Ὑψικλέους τὰ εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενα », qui, s'il peut bien signifier « les choses d'Hypsiclès ajoutées à Euclide », peut aussi suggérer, en sous-entendant « βιβλία », que les *deux* livres additionnels sont dus à Hypsiclès comme l'a cru une grande partie de la tradition.

Cela ne se retrouve pas pour le Livre XV dans les manuscrits ***PBv***, mais c'est le cas de la tradition médiévale arabe, puis latine, qui lui a souvent attribué les *deux* livres additionnels, tout en se divisant quant à leur origine, les attribuant à Hypsiclès soit comme un auteur à part entière, soit en postulant une source antérieure (Euclide, Apollonius), considérant alors Hypsiclès, à l'instar de Théon ou Campanus, comme un éditeur ou un réviseur d'Euclide[9]. Ainsi, dans l'édition princeps du texte grec ([Grynée, 1533], p. 257), on lit, avant le Livre XIV :

> « ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΩΝ ΙΔ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ, ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ, ΩΣ ΑΛΛΟΙ ΔΕ ΥΨΙΚΛΕΟΥΣ Ἀλεξανδρέως. Περὶ τ̄ ε̄ σωμάτων πρῶτον »
>
> (14e [livre] des Éléments d'Euclide et quatrième des solides, comme certains le pensent, soit, comme d'autres, d'Hypsiclès d'Alexandrie, premier [livre] au sujet des cinq corps)[10],

et on trouve un titre strictement analogue au début du Livre XV[11].

---

[7] [Heiberg, 1882], p. 155 mentionne le Flor. Med. Laur. 28.08 (λ) comme exemple de ce genre qui, en effet, au f° 253v, enchaîne XV 1 à la fin de la récapitualition du Livre XIV sans le moindre intertitre ou espace vacant.

[8] *EHM,* V, 50.17— 66.16 Heiberg (= *EHS,* V, 1, 29.17—38.16).

[9] C'est le cas de B. Zamberti et de F. Candalle de Foix. Voir [Heiberg, 1882], p. 154. Pour la tradition arabe, voir *infra,* § 9.

[10] Même titre, avec d'infimes variantes, dans l'édition d'Oxford ([Euclide-Gregory, 1703]).

[11] *Ibid.,* p. 263 : "ΠΕΜΠΤΟΝ" (cinquième) et "δεύτερον" (deuxième) remplacent "ΤΕΤΑΡΤΟΝ" (quatrième) et "πρῶτον" (premier).

Ainsi l'attribution était donc encore présentée comme débattue au début du XVI^e siècle. Hypsiclès n'est semble-t-il pas connu de la tradition adélardienne des *Éléments* (son nom, mais aussi la préface à XIV, y ont été éliminés), en particulier chez Campanus, mais son implication pour le Livre XIV a été reconnue grâce à la tradition gréco-latine de Zamberti (1505)[12], à ses différentes reprises, et déjà par les extraits publiés par G. Valla (1499). En fait, selon Heiberg, dans l'Occident latin, les Livres XIV et XV sont déjà dissociés d'un Euclide envisagé en 15 Livres dès le XV siècle[13]. Pierre de la Ramée, qui s'emploie à minimiser le rôle d'Euclide dans la constitution des *Éléments*[14], souligne que le Livre XIV n'est pas d'Euclide, comme cela peut se déduire de la préface, mais d'Apollonius *via* Hypsiclès. Selon la Ramée, le géomètre Aristée, cité par ailleurs par Pappus comme antérieur à Euclide, a aussi joué un rôle dans cette question de la comparaison mutuelle des polyèdres ; quant au Livre XV, on le doit soit à Apollonius, soit à Hypsiclès, soit à Aristée, soit … à quelqu'un d'autre (quiuis alius)[15] !

Il a fallu attendre plus longtemps pour que la tradition dissocie les deux Livres additionnels et pour que l'on réserve l'attribution à Hypsiclès au seul Livre XIV. Dans la préface du volume III de son édition trilingue (1814-1818), Peyrard continue à parler des « deux livres des cinq corps attribués à Hypsicle »[16], mais il souligne qu'il y a une grande différence de niveau entre les deux Livres, qu'ils sont probablement dus à des auteurs distincts et que le Livre XIV est certainement beaucoup plus ancien que le XV. Ce qui n'empêche pas Bretschneider[17] de croire encore que les deux Livres sont dus à Hypsiclès et qu'Isidore était le nom de son maître. En 1873, Friedlein datait le Livre XV du IV^e ou du V^e siècle de notre ère, mais Th.-H. Martin, l'année suivante, l'attribuait à Damascius, à cause de la mention d'Isidore, identifié au philosophe Isidore d'Alexandrie (ou Isidore de Gaza). Or, ni cet Isidore, ni Damascius ne sont connus pour quelque travail mathématique que ce soit.

Indépendamment l'un de l'autre semble-t-il, Tannery et Heiberg proposèrent d'identifier Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ... μέγας διδάσκαλος et Isidore de Milet, architecte de Sainte-Sophie[18], collègue d'Eutocius d'Ascalon et d'Anthémius de Tralles. En 1884, dans son article « Eutocius et ses contemporains »[19], Tannery revint sur les quatre mentions du nom d'Isidore que l'on trouve dans les commentaires d'Eutocius aux traités de *La sphère et le cylindre* et de *La mesure du cercle* d'Archimède. Isidore apparaît trois fois à la fin de chacun des (trois) livres. La quatrième et plus importante mention se

---

[12] Zamberti le cite même pour le Livre XV. Cf. le titre cité *supra* note 6.
[13] [Heiberg, 1882], p. 154, mentionne notamment Constantin Lascaris.
[14] Voir [Loget, 2004].
[15] Voir [Ramus, 1569], Liber 30 (XIV) et Liber 31 (XV). Cf. *infra,* note 52.
[16] [Peyrard, 1814-1818], vol. III, p. iii. Dans le texte grec qu'il édite, il n'y a pas de titre, mais il y en a en latin et en français, donc clairement ajouté par lui : « *DE QUINQUE CORPORIBUS LIBER PRIMUS* » (p. 481), « *DE QUINQUE CORPORIBUS LIBER SECUNDUS* » (p. 509).
[17] [Bretschneider, 1870], pp. 182-183.
[18] Voir [Tannery, 1879], p. 64, note 1 et [Heiberg, 1882], p. 156, en particulier note 1.
[19] [Tannery, 1884], p. 118-136, en particulier 118-122.

trouve à la suite de l'exposé des deux solutions au problème de l'insertion des deux moyennes proportionnelles utilisant les coniques (dont la première est explicitement rapportée à Ménechme) dans le commentaire au second Livre de *La Sphère et le cylindre* d'Archimède. Cette glose indique que la parabole se trace à l'aide d'un compas découvert « par notre maître Isidore de Milet et décrit par lui dans son commentaire aux *Καμαρικῶν* (*Voûtes*) de Héron »[20]. Tannery proposa de rapporter ces mentions, non plus à Eutocius lui-même (comme en 1879), mais à l'éditeur de deux de ses commentaires et donc d'identifier ce discipline d'Isidore et l'auteur de notre Livre XV.

Ainsi les deux Livres additionnels se trouvaient-ils définitivement dissociés l'un de l'autre : l'inspiration du Livre XIV rapportée au II^e^ siècle avant notre ère et la composition du Livre XV attribuée au dernier cercle de lettrés et de mathématiciens antiques connu de nous (VI^e^ siècle de notre ère). À la lumière des données de la tradition manuscrite, Heiberg, dans son édition de 1888, soulignait que plusieurs exemplaires de ce qu'il identifiait comme la recension théonienne des *Éléments,* par exemple ***bpq***, ne contiennent pas les Livres additionnels et donc que leur adjonction devait être postérieure à Théon d'Alexandrie[21], même s'ils existent aussi dans ***P*** (version pré-théonienne selon Heiberg) mais — il convient de le souligner — séparés des *Éléments.* Il fallait donc supposer que le modèle de ***P*** contenait seulement les Livres I à XIII. ***M*** témoignerait du fait que le Livre XIV a eu (d'abord ?) une transmission indépendante. Heiberg estimait aussi que l'adjonction des deux Livres avait été conjointe et donc, en admettant l'identification d'Isidore, qu'elle n'avait pas pu avoir lieu avant le VI^e^ siècle de notre ère, mais qu'elle était antérieure à la transmission du traité d'Euclide aux savants arabes, au cours de la seconde moitié du VIII^e^ siècle. Il lui semblait donc raisonnable d'assigner ladite adjonction au VI^e^ siècle de notre ère. Les conclusions de Heiberg et Tannery ont été bien reçues et elles sont admises par la plupart des spécialistes aujourd'hui.

En reprenant ce dossier, nous n'avons pas trouvé d'élément nouveau qui viendrait contredire formellement ce consensus. Nous restons simplement prudents et ne perdons pas de vue que pour très vraisemblables qu'elles soient, les hypothèses de Heiberg restent des hypothèses et il se peut qu'un jour de nouvelles données viennent les remettre en cause. De fait, les informations que nous livre l'examen des manuscrits ne sont pas si contraignantes :

• Les copies conservées peuvent être partielles, quoique réalisées sur des modèles plus complets parce qu'ils résultent de choix décidant, par exemple, de regrouper dans un même volume des écrits considérés comme authentiquement euclidiens et donc de ne garder que les Livres I à XIII, laissant de côté XIV-XV, quand bien même ceux-ci existaient dans le (ou les) modèle(s) copié(s). Dans le manuscrit d'Oxford, *Bodleian.*

---

[20] Voir [Archimède-Heiberg, 1910-1915], vol. III, p. 84.8-11.

[21] Il prenait ainsi le contre-pied de [Montucla, 1798], I, p. 208 qui affirmait que les Livres XIV-XV — il les attribuait tous deux à « Hypsicle d'Alexandrie » — avaient probablement été ajoutés par Théon. Pour aller dans le même sens que Heiberg, on peut remarquer que les titres et colophons du Livre XIV ne mentionnent pas l'édition de Théon.

Auct. F 6.23 (f° 265[v]), le copiste a commencé par reproduire le Livre XIV à la suite du Livre XIII, puis s'est arrêté. Il a barré la page et inséré ensuite des extraits de l'*Optique.* Une telle démarche pourrait expliquer la spécificité des codices ***Sbpq***.

• On a pu réaliser (c'est quasiment sûr) des éditions en plusieurs tomes. Le manuscrit ***m*** pourrait être le second tome d'une telle entreprise dont le premier contenait les *Éléments,* I-XV[ab], le second, (***m***), XV[c], l'*Optique* et la *Catoptrique* euclidiennes, l'*Almageste* de Ptolémée … La transmission "indépendante" de la troisième partie du Livre XV résulterait d'un tel découpage.

• Quant à celle du Livre XIV (dont Heiberg fait grand cas), elle serait davantage discriminante si l'état du texte que le manuscrit ***M*** contient était véritablement différent de celui des autres copies, s'il représentait un intermédiaire bien distinct entre la monographie d'Hypsiclès, rédigée au II[e] siècle avant notre ère et la version éditée comme Livre XIV des *Éléments* au VI[e] siècle, dans l'hypothèse de Heiberg. De fait, en dépit d'inévitables divergences ponctuelles qui caractérisent les manuscrits grecs, il n'y a pas de variante structurelle importante dans la tradition directe des livres additionnels telle qu'on en connaît pour la portion authentique des *Éléments*. On peut voir, dans cette homogénéité de la tradition directe, une corroboration de l'hypothèse selon laquelle une seule édition des Livres XIV-XV a existé en grec. Du moins, paraît-il assuré que les copies conservées procèdent toutes d'un archétype unique. Mais la transmission "isolée" du Livre XIV dans ***M*** pourrait bien n'être que le fruit du hasard.

• Que l'état actuel du Livre XV *grec* soit probablement dû à l'action compilatrice d'un disciple d'Isidore de Milet au VI[e] s. de notre ère, nous paraît bien assuré, mais il n'y a guère de raison d'accepter l'intégrité du Livre XV et la prise en compte de la tradition indirecte ne favorise pas cette hypothèse[22].

• L'idée que les Livres XIV-XV ont été conjointement ajoutés aux *Éléments* est très vraisemblable, mais il est impossible d'être catégorique : elle s'impose à nous à partir d'un argument *a silentio.* L'absence de citations grecques nous conduit à penser que cette amplification, unique ou multiple, a été plutôt tardive. La description par Proclus de la "fin" des *Éléments* suggère qu'il ne connaissait pas une version pourvue de Livre(s) additionnel(s)[23] et nous essaierons d'argumenter en faveur de la thèse selon laquelle Pappus ne semble pas non plus connaître ce qui est pour nous le Livre XIV. Mais par qui et précisément à quelle(s) date(s) a (ont) été réalisée(s) cette (ces) adjonctions, nous l'ignorons.

• Même l'assertion de Heiberg concernant la transmission médiévale qui lui sert de *terminus ad quem* est contestable.

La date qu'il retient (vers 775) est censée correspondre à l'arrivée, après une demande auprès de l'Empereur de Byzance, d'un manuscrit euclidien, parmi d'autres, à la cour du

---

[22] Voir *infra,* § 9, note 89.
[23] Voir *infra,* § 7.

Calife al-Mansūr (règne de 754 à 775). Heiberg s'appuie sur le témoignage[24] de l'historien et bibliographe tardif Hājjī Khalīf (1609-1657) :

> « Le calife al-Mansūr a demandé à l'empereur des Byzantins de lui envoyer des livres de mathématiques pour qu'ils soient traduits. Il lui envoya le livre d'Euclide et quelques livres sur la physique. Les musulmans les ont alors lus, se sont informés de leurs contenus et se sont empressés de se procurer ce qu'il en restait »[25].

Au demeurant, des sources plus anciennes (al-Ikhbārī, 1e moitié du Xe s. ; Ibn Khaldūn, mort en 1406) mentionnent également que ces premières traductions, et parmi elles, celle des *Éléments,* furent réalisées au cours du règne du Calife al-Mansūr (754-775) :

> « Il [al-Mansūr] fut le premier calife à favoriser les astrologues (…). Il fut le premier calife à se faire traduire des ouvrages de langues étrangères en arabe, dont *Kalīla wa Dimna* et *Sindhind*. On lui traduisit également des ouvrages d'Aristote sur la logique et d'autres matières, l'*Almageste* de Ptolémée, l'*Arithmétique* [de Nicomaque], le Livre d'Euclide et d'autres livres anciens du grec classique, du grec byzantin, du pehlevi, du néopersan et du syriaque … »[26].

Ibn Khaldūn[27] rapporte la même anecdote qu' Hājjī Khalīf concernant l'ambassade dépêchée auprès de l'Empereur byzantin. Un peu plus loin, il ajoute que le livre d'Euclide « fut le premier ouvrage grec à être traduit par les musulmans sous le règne d'Abū Ja'far al-Mansūr » , donc avant le premier traducteur connu de nous, al-Hajjāj, dont la première version aurait été commanditée sous le règne du Calife Hārūn ar-Rashīd (786-809). Compte tenu de ce que nous savons de l'histoire du livre byzantin, ce n'est pas un point de détail : à l'époque d'al-Mansūr, un manuscrit grec des *Éléments* n'avait pas encore subi l'opération de translittération dont sont issus nos plus anciens manuscrits grecs complets conservés (***PB***).

Cela dit, même si l'événement rapporté est exact, rien ne prouve que *ce* premier manuscrit contenait les Livres XIV-XV. La thèse de Heiberg présuppose que les traducteurs arabes ont eu simultanément accès aux Livres authentiques et aux Livres XIV-XV, mais, comme nous le verrons, cela n'est pas garanti.

---

24 Voir [Heiberg, 1882], p. 7.

25 [Hājjī Khalīf-Flügel, 1835–1858], III, pp. 91-92.

26 Al-Ikhbārī, cité dans [al-Mascūdī-Pellat, 1965-1979], § 3446.

27 [Ibn Khaldūn-Cheddadi, 2002] p. 944.

2. Hypsiclès d'Alexandrie

Un mathématicien portant le nom de Hypsiclès est cité par trois auteurs anciens et un traité intitulé *Anaphoricos*[28] est transmis sous ce nom. Il traite des temps d'ascension des signes et de leurs degrés selon une démarche arithmétique similaire à l'une de celles que l'on connaît grâce aux tablettes mésopotamiennes. Il a été conçu pour la latitude d'Alexandrie et est certainement antérieur à Hipparque.

L'astrologue du deuxième siècle de notre ère, Vettius Valens, cite précisément et nommément cet *Anaphoricos* d'Hypsiclès au neuvième et dernier livre de son *Anthologiarum*[29]. Diophante mentionne une définition concernant les nombres polygones proposée par Hypsiclès dans son propre traité consacré à cette question[30]. Achille Tatius, grammairien (probablement du IIIe s. de notre ère), dans une *Isagogê* à la cosmologie, ultérieurement utilisée comme introduction aux *Phénomènes* d'Aratos, dresse une liste de cinq auteurs ayant traité de l'harmonie des sphères : Aratos, Ératosthène, Hypsiclès, Thrasylle et Adraste d'Aphrodise[31]. Si on admet le caractère apparemment chronologique de la liste, cela place Hypsiclès entre la fin du IIIe s. avant et le début du Ier s. après notre ère. Il n'y a aucune raison particulière de douter que nous avons affaire à un seul et même auteur. Dès lors, la détermination de sa chronologie repose pour l'essentiel sur la préface de sa monographie consacrée à l'icosaèdre et au dodécaèdre, maintenue en ouverture du livre ajouté aux *Éléments*[32]. Elle nous sera aussi très précieuse pour discuter les intentions d'Hypsiclès. Résumons-là.

(*i*) Le point de départ de l'entreprise a été un traité d'Apollonius sur la comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère.

(*ii*) L'attention portée par Hypsiclès à ce problème prit son point de départ dans une discussion antérieure qu'avaient menée son père et un certain Basilide de Tyr, lesquels n'étaient pas satisfaits du traitement de la question par Apollonius.

(*iii*) Hypsiclès eut l'occasion de consulter ce qui, dans la préface, est désigné comme « un autre livre d'Apollonius » et que la plupart des interprètes, considère comme une seconde édition du premier, en accord avec une assertion transmise dans la transition intercalée entre XIV **1** et **1/2** (... ὑπὸ δὲ ᾿Απολλωνίου ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον)[33] — peut-être renforcée par l'affirmation de la préface selon laquelle l'ouvrage était effectivement largement mis en circulation.

(*iv*) Malgré la correction de ce second traitement apollonien, Hypsiclès décide de publier son propre "Mémoire" ou "Commentaire" [cf. "ὑπομνηματισάμενος"] et de l'expédier à un certain Protarque, lié d'amitié avec son père.

---

[28] Voir [Hypsikles-De Falco & Krause, 1966], édition du texte grec : pp. 34-40 ; traduction allemande : pp. 46-50. Il pourrait s'agir seulement d'un épitomé de l'ouvrage original d'Hypsiclès.
[29] [Vettius Valens-Kroll, 1908], p. 157.12-13.
[30] Voir [Diophante-Tannery, 1893-1895], vol. I, 470.27—472.4.
[31] [Achille Tatius-Maass, 1898], p. 43.9.
[32] Voir *infra,* II, A, §§ 2, 3 et ANNEXE, Tableau 4.
[33] *EHM,* V, 23-25 Heiberg (= *EHS,* V, 1, 4.8-9).

(*v*) Au passage, on apprend que Basilide et le père d'Hypsiclès avaient produit une version corrigée des preuves défectueuses de la première version d'Apollonius, mais il ne semble pas que le travail d'Hypsiclès ait consisté à sacrifier à la piété filiale en publiant ce texte dont il a entendu parler sans plus.

Les points (*ii*)-(*iii*) suggèrent fortement que le père d'Hypsiclès (et son ami Basilide de Tyr) avaient eu accès à une édition d'un traité d'Apollonius, tandis que le fils eut accès à une seconde version, améliorée, et dont il affirme qu'elle est désormais à la portée de tous. À la suite de [Friedlein, 1873], ,on en donne une interprétation chronologique : le père d'Hypsiclès était sans doute contemporain d'Apollonius et en tout cas pas beaucoup plus jeune que lui. Il mourut probablement avant de pouvoir prendre connaissance de la seconde version du traité. Par conséquent, Hypsiclès appartient à la première moitié du II^{e} s. avant notre ère. C'est la date admise par Heiberg et communément acceptée aujourd'hui.

Depuis [Crönert, 1906], on identifie Basilide de Tyr avec Basilide le Syrien, philosophe épicurien, né vers 245, quatrième scholarque du Jardin à partir de 201/200 jusqu'à sa mort en 175[34]. Basilide est aussi cité dans la *Vita Philonidis* comme un des maîtres de Philonide. En mathématiques, ce dernier aurait été d'abord disciple d'Eudème de Pergame, puis de Dionysodore de Caunos. On l'identifie par conséquent au géomètre Philonide mentionné par Apollonius dans la préface au Livre II des *Coniques* adressé à Eudème de Pergame. Quant au dédicataire du Livre XIV, il s'agirait du philosophe épicurien Protarque de Bargylia, maître de Démétrius Lacon (*ca* 150-75) selon Strabon (XIV. 2. 20)[35]. Pour spéculatives qu'elles soient, ces multiples identifications sont chronologiquement compatibles entre elles.

3. Contenu, découpage et principaux résultats du Livre XIV

Tel qu'il nous est parvenu en grec, le Livre XIV s'achève par une double récapitulation finale, très certainement inauthentique, mais la lecture de l'une ou l'autre de ses deux parties[36] nous permet de nous faire très rapidement une idée du contenu mathématique qui se réduit, pour l'essentiel, à trois résultats principaux :

1) Une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison, le [rapport] que la droite pouvant produire le carré décrit sur la droite entière et celui sur le grand segment relativement à la droite pouvant produire le carré décrit sur la droite entière et celui sur le petit segment est celui du côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère.

[L'expression du résultat dans la langue naturelle est quelque peu opaque pour un Moderne : si la droite d est coupée en extrême et moyenne raison et que ses segments

---

34 En fait, Crönert descendait Basilide dans le 2^{e} quart du II^{e} siècle, à tort selon Tiziano Dorandi ; il proposait donc une chronologie plus basse pour Hypsiclès (entre 150 et 125). Voir [Dorandi, 1994a], p. 91.

35 Mais voir la discussion et les références données dans [Dorandi, 1994b].

36 Dans nos traductions, nous les distinguons comme « Récapitulations, 1 » et « Récapitulations, 2 ».

sont d_1 et d_2 (avec $d_1 > d_2$), la droite pouvant produire le carré décrit sur la droite entière et celui sur le grand (resp. petit) segment, ∂_1, (resp. ∂_2) est, par définition, celle qui vérifie : $(\partial_1)^2 = (d)^2 + (d_1)^2$ [resp. $(\partial_2)^2 = (d)^2 + (d_2)^2$]. Le rapport $\partial_1 : \partial_2$ a une expression numérique complexe :

$$\left(\sqrt{2}/_2 \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} \ : \ \sqrt{3} \text{ ou } \sqrt{5+\sqrt{5}}/\sqrt{6} \right),$$

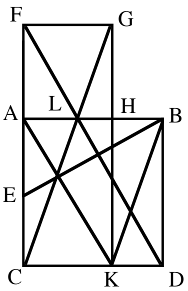
mais il reçoit des interprétations géométriques assez simples[37]].
2) Le rapport du côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère est le même que celui de la surface du dodécaèdre à celle de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère[38].
3) Le rapport de la surface du dodécaèdre à celle de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère est le même que celui de leurs volumes et ce, parce que le pentagone — face du dodécaèdre — et le triangle — face de l'icosaèdre (inscrit dans la même sphère) — sont circonscrits par le même cercle[39].

La récapitulation en déduit que le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre inscrits dans une même sphère est donc celui de la droite pouvant produire le carré décrit sur la droite entière et celui sur le grand segment — quand une droite est coupée en extrême et moyenne raison — relativement à la droite pouvant produire le carré décrit sur la droite entière et celui sur le petit segment.

Décrire l'ensemble du Livre d'une manière plus détaillée suppose que l'on utilise un système de numérotation des Propositions comme on le fait habituellement dans les éditions de textes géométriques grecs anciens. Et si les manuscrits ne proposent rien d'explicite ou de satisfaisant, les Modernes l'introduisent, en s'appuyant sur l'analyse de la structure déductive et les caractéristiques stylistiques du traité. Bien qu'il s'agisse d'un texte court[40], il ne semble pas que cela aille de soi pour le Livre XIV. Le Tableau 2 de

---

[37] Ainsi, on peut facilement exhiber les droites (∂_1, ∂_2) sur la figure ci-dessous, associée à la Proposition II 11 des *Éléments* (construction de la section en extrême et moyenne raison sans recours aux proportions grâce aux égalités d'aires).



Si on prend AB comme droite d de référence, elle est coupée en extrême et moyenne raison en H et $d_1 = AH$, $d_2 = HB$. Alors $\partial_1 = KA$, $\partial_2 = KB$.
Mais si on prend CF comme droite d de référence, elle est coupée en extrême et moyenne raison en A et $d_1 = CA = CD$, $d_2 = AF = CK$.
Alors $\partial_1 = DF$, parallèle à AK, $\partial_2 = CG$, parallèle à KB.
DF et CG se coupent en L, sur AB, tel que AL = HB.
On vérifie aisément que $\partial_1 : \partial_2 :: d_5 : c_3$ où d_5 désigne la diagonale d'un pentagone régulier, c_3 le côté d'un triangle équilatéral inscrits dans un même cercle, expression du rapport indépendante de toute donnée stéréométrique.

[38] En notant a_n (resp. S_n) l'arête (resp la surface) d'un polyèdre régulier à n faces : $a_6 : a_{20} :: S_{12} : S_{20}$.

[39] En notant V_n le volume d'un polyèdre régulier à n faces : $S_{12} : S_{20} :: V_{12} : V_{20}$, et ce, parce que : $r_{12} = r_{20}$ (avec r_n rayon du cercle circonscrit à la face f_n d'un polyèdre régulier à n faces) ou $a_{12} : a_{20} :: c_5 : c_3$.

[40] Environ 20 000 signes, soit seulement les quatre cinquièmes du Livre II ou du Livre IV, eux-mêmes les Livres les plus brefs des *Éléments.* Ajoutons que les portions métamathématiques (préface = 1100 signes ; double récapitulation finale = 2300 signes), la double preuve de ce que nous appelons XIV **3** et son lemme

l'ANNEXE indique les correspondances entre différents découpages qu'on en a fait, y compris celui que nous proposons. Chez Zamberti (1505) et dans l'édition de Bâle (1533), on dénombre 8 Propositions dont seules les quatre premières sont numérotées, plus la préface, une preuve alternative, la double récapitulation finale et un Corollaire (explicitement distingué chez Zamberti). C'est David Gregory qui propose la première division raisonnée du texte grec avec intertitres ajoutés. On peut dire qu'elle est maintenue dans ses grandes lignes par Peyrard. En revanche, Heiberg se contente de diviser le texte en 12 sections ; son découpage est censé suivre celui que présente le célèbre manuscrit ***P***, bien qu'il s'en écarte[41]. Il n'introduit ni numérotation des Propositions, ni intertitres ajoutés tels que [Λῆμμα], [Πόρισμα] comme il l'a fait dans ses autres éditions de textes mathématiques "classiques", y compris les *Éléments*. Ceci explique sans doute pourquoi Heath ne s'est pas cru obligé de respecter sa façon de faire. Il propose un découpage proche de celui de Gregory, à ceci près qu'il divise en 3 Propositions (3-4-5) ce qui était la Proposition XIV 3 et son Corollaire dans l'édition d'Oxford, et que nous appelons pour notre part « Lemme XIV **2/3** ».

Le découpage que nous proposons (exprimé à l'aide de symboles modernes pour faire bref) en 5 Propositions, 3 Lemmes et une preuve alternative (avec Lemme) est décrit dans le petit tableau ci-dessous. Introduisons d'abord quelques notations[42] pour faire bref :

c_n	Côté d'un polygone régulier à n côtés	y_n	Distance entre le centre d'un polygone régulier à n côtés et son côté c_n (s'il s'agit d'une face f_n d'un polyèdre régulier, y_n est donc la distance entre le centre de cette face et une arête du polyèdre, a_n)
a_n	Arête d'un polyèdre régulier à n faces	p_n	Distance des faces f_n au centre de la sphère circonscrite
r_n	Rayon du cercle circonscrit à la face f_n	S_n	Surface d'un polyèdre régulier à n faces
f_n	Face d'un polyèdre régulier à n faces	V_n	Volume d'un polyèdre régulier à n faces

semr [d] : $d = s_1 + s_2$:	La droite d est coupée en extrême et moyenne raison ; (s_1, s_2) en sont les segments et par convention on suppose $s_1 > s_2$
d_5 :	diagonale du pentagone régulier

(3100 signes), le Lemme SEMR postposé (2800 signes) font que le noyau proprement mathématique du traité représente environ 10 000 signes, soit la moitié de ce qu'Heiberg a édité !

[41] Ainsi on a section **1** = $\hat{\alpha}$, mais **2** est introduit 14 lignes après β dans ***P***, **3** est introduit 4 lignes après $\hat{\gamma}$, section **4** = δ, section **6** = $\hat{\epsilon}$, section **7** = ϛ̂ … section **10** = θ. La section **5** est introduite au milieu de ce que j'appelle le lemme XIV **2/3**, pour une démonstration potentielle, et ce, apparemment, parce qu'un second diagramme lui est associé ! Rien dans ***P*** ne correspond aux sections **11-12**, ce qui est un indice que le Lemme postposé dit SEMR (section en extrême et moyenne raison) et la récapitulation finale sont inauthentiques ; v. *infra,* note 45 et § 6.

[42] Dans le texte grec, les égalités quadratiques ne sont évidemment pas exprimées algébriquement, mais énoncées soit en terme de "puissance", soit en termes de carrés décrits sur des droites.

DECOUPAGE DU LIVRE XIV

XIV **1**	$y_5 = \frac{1}{2}(c_6 + c_{10})$. Ajout : $y_3 = \frac{1}{2}(r_3)$	2.7—4.3 Heib
XIV **1/2**	$(d_5)^2 + (c_5)^2 = 5\,(c_6)^2$	4.18—5.16
XIV **2**	$r_{12} = r_{20}$	5.17—8.5
XIV **2/3**	(***i***) S_{12} = 30 Rectangles (c_5, y_5) ; (***ii***) S_{20} = 30 Rectangles (c_3, y_3) ; (***iii***) $S_{12} : S_{20}$ = Rectangle (c_5, y_5) : Rectangle (c_3, y_3)	8.6—9.23
XIV **3**	$S_{12} : S_{20} :: a_6 : a_{20}$	10.1—11.11
XIV **3/3*alit***	f_5 = Rectangle $[(3/2).r_5, (5/6).d_5]$	11.18—13.4
XIV **3*alit***	$S_{12} : S_{20} :: a_6 : a_{20}$	13.5—14.15
XIV **4**	semr [d] : $d = s_1 + s_2 \rightarrow \partial_1 : \partial_2 :: a_6 : a_{20}$ avec $(\partial_1)^2 = (d)^2 + (s_1)^2$, $(\partial_2)^2 = (d)^2 + (s_2)^2$	14.16—17.10
XIV **5**	$a_6 : a_{20} :: V_{12} : V_{20}$	17.11—19.4
Lemme SEMR	semr [d, d'], avec $d = s_1 + s_2$, $d' = t_1 + t_2$. Alors $d : s_1 :: d' : t_1$	19.5—20.10

Par rapport aux trois résultats principaux du Livre XIV que nous évoquions au début de ce paragraphe, le premier est établi dans la Proposition que nous numérotons XIV **4**, le deuxième dans XIV **3** et l'assertion relative aux cercles circonscrits dans XIV **2**. La première partie de la récapitulation est donc régressive, la seconde va plutôt en sens inverse, mais elle ne rappelle pas le résultat concernant la circonscription du pentagone du dodécaèdre et du triangle de l'icosaèdre par un même cercle.

Nous avons assigné des désignations différentes, d'une part à ce que nous avons appelé la « *Proposition* 1 » — laquelle possède une fonction lemmatique pour XIV **3**, d'autre part aux *Lemmes* XIV **1/2**, **2/3**[43], parce que ces derniers sont insérés immédiatement avant les Propositions dans lesquelles ils sont utilisés et précédés ou suivis d'une cheville de transition qui souligne l'architecture déductive et explicite leur statut :

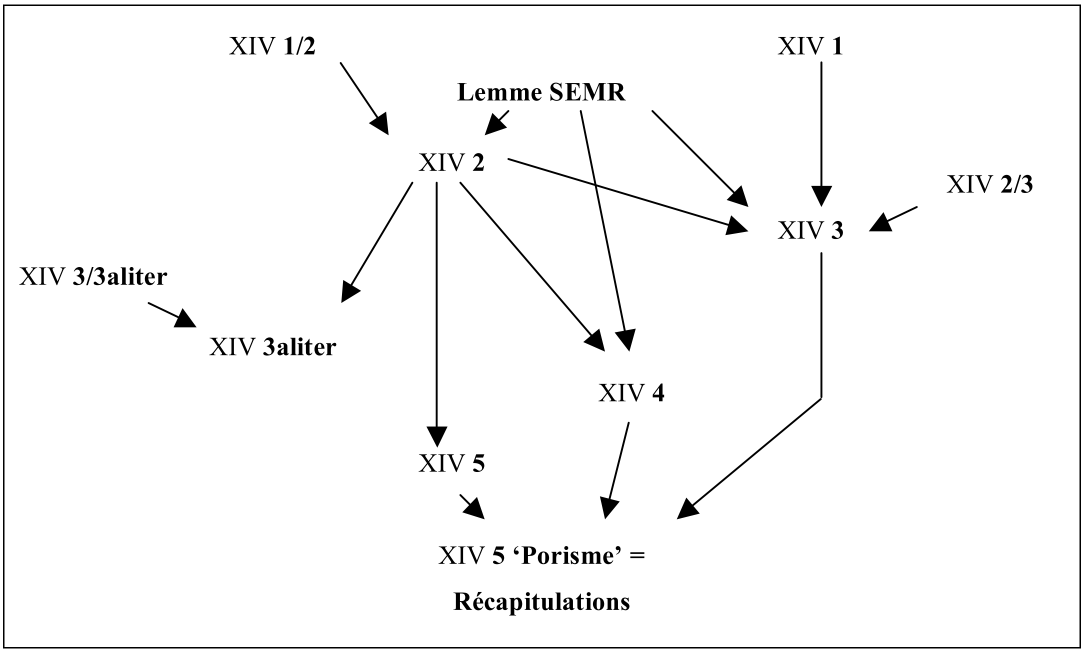
— une annonce avant XIV **1/2** « en ayant préalablement établi ceci » (προγραφέντος τοῦδε) ;

— des évaluations après XIV **1/2** et **2/3** (respectivement « Ceci étant démontré, il faut démontrer que ... » (Τούτου δεδειγμένου δεικτέον ὅτι), « Cela étant clair, il faut démontrer que ... » (Τούτου δήλου ὄντος δεικτέον ὅτι).

Ajoutons que ceux que nous avons appelés « Lemmes » sont formulés de manière conditionnelle, tandis que les Propositions ne le sont pas[44] (le Lemme XIV **3/3*alit*** est hors jeu car il n'a pas d'énoncé général en grec).

[43] Nous reprenons une notation (N/N+1) introduite par C.M. Taisbak pour la numérotation des Lemmes ; par exemple XIV **2/3** désigne le Lemme intercalé entre les Propositions XIV **2** et **3**.
[44] Une dualité comparable se retrouve dans le Livre XII et, dans une moindre mesure, dans le Livre XIII.

L'examen, même rapide, de la structure déductive du Livre XIV explicitée dans le schéma ci-dessous, permet de dégager immédiatement quelques conclusions :



- La Proposition XIV **2** constitue le fondement mathématique du Livre XIV, puisque toutes les autres Propositions importantes en dépendent. Comme nous le verrons, le Livre XIV attribue le résultat qu'elle transmet à un certain Aristée.
- L'auteur dudit Livre a introduit un certain nombre de Lemmes pour ses Propositions XIV **2** et **3**, mais, tandis que ceux qui préparent une seule Proposition — XIV **1/2** pour XIV **2**, XIV **1** et XIV **2/3** pour XIV **3** — sont bien placés, on voit que le Lemme dit SEMR, requis dans les trois résultats principaux XIV **2-3-4**, a été inséré en fin de Livre.
- Ceci suggère immédiatement qu'il s'agit d'un ajout postérieur, après que l'on se soit rendu compte qu'un présupposé de ce genre était mis en œuvre dans les trois preuves principales, ce que confirme la remarque que nous faisions plus haut[45] sur la numérotation propre au manuscrit ***P*** qui s'arrête avec ce que nous appelons ici XIV 5.

Dans l'examen qui précède, nous nous sommes limités aux connexions internes au Livre XIV. Il faut également remarquer que ses démonstrations présupposent aussi un certain nombre de résultats contenus dans les livres authentiques des *Éléments,* notamment les principaux résultats du Livre XIII. Ainsi XIII 4 est utilisée dans XIV **4**, XIII 8 dans XIV **2**, XIII 9 dans XIV **3**, XIII 10 dans XIV **1/2**, **2** et **4**, XIII 12 dans XIV **2**

[45] Cf. *supra* note 41.

et **4**, XIII 15 et XIII 16 + Por. dans XIV **2**, XIII 17 + Por. dans XIV **2**, **3** et **4**. On peut même dire qu'il est explicitement fait référence à XIII 12 dans l'ajout à XIV **1** :

> « Il est alors évident à partir du [12e] théorème du Livre XIII, que la perpendiculaire menée à partir du centre du cercle sur le côté du triangle équilatéral est la moitié du rayon du cercle »,

et, dans la séquence insérée au cours de la preuve de XIV 4 :

> « car le côté du pentagone est, en puissance, égal à la fois au côté de l'hexagone et à celui du décagone, ceux inscrits dans le même cercle »,

il est facile de reconnaître une citation non instanciée (partielle) de XIII 10. Cependant rien ne garantit que cet ajout et/ou cette explication postposée[46] soient authentiques ; c'est même assez peu probable.

4. Retour sur la Proposition XIII 18

À partir des titres du genre : « D'Hypsiclès, le livre ajouté à Euclide » insérés dans les manuscrits, il pourrait sembler naturel d'inférer que l'intention de compléter les *Éléments* appartenait à notre auteur, d'autant que dans la dernière section du Livre XIII on ne trouve pas seulement la construction successive des cinq polyèdres réguliers et leur circonscription par une sphère. Euclide propose, dans l'ultime Proposition XIII 18, d'« exhiber les côtés des cinq figures » et de « les comparer (συγκρῖναι) les uns aux autres » ce qui constitue bien une première étape de la *comparaison* (σύγκρισις) des polyèdres réguliers quant à leurs arêtes, si on les suppose inscrits dans une même sphère. Le livre XIV reprend la même situation géométrique, même s'il se limite aux seuls dodécaèdre et icosaèdre. Cela dit, la lecture de la preuve de XIII 18 montre que c'est la seule comparaison qui ne soit pas quasi immédiate. Bien que nous en ayons traité ailleurs[47], nous résumerons donc cette Proposition afin que le lecteur puisse suivre notre présente analyse des liens entre Livres XIII et XIV.

Rappelons d'abord que les troisièmes parties de chacune des Propositions XIII 13-14-15 fournissent une relation entre le diamètre de la sphère circonscrite, D, et l'arête de trois (a_4, a_6, a_8) des cinq polyèdres réguliers. En notations modernisées :

$D^2 = (3/2)(a_4)^2$ [XIII 13c] ; $D^2 = 2(a_8)^2$ [XIII 14c] ; $D^2 = 3(a_6)^2$ [XIII 15c] (*).

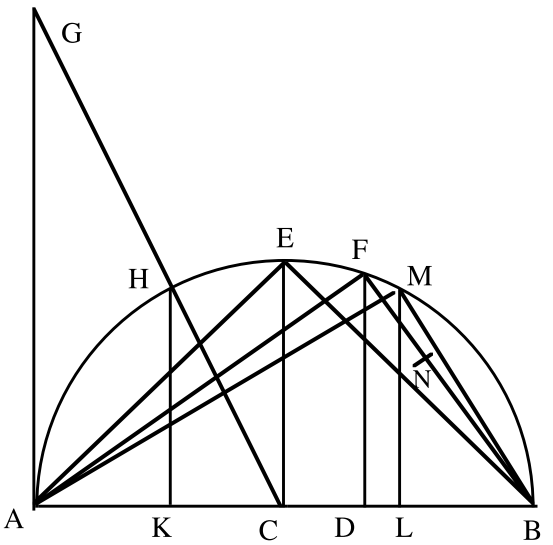
Dans les *énoncés* de XIII 16-17, Euclide ne donne pas de relation du même genre entre D^2 et $(a_{20})^2$ ou $(a_{12})^2$; il se contente d'indiquer que le rapport $(a_n)^2 : D^2$ n'est pas numériquement exprimable pour n = 20 ou 12, plus précisément il dit que a_{20} et a_{12} sont

---

[46] Sur les notions d'« explication postposée » et de « citation non instanciée », exemples fondamentaux de ce que nous avons appelé ailleurs *item possiblement interpolé* (*IPI*), voir [Euclide-Vitrac, 2001], Notice « *Sur les problèmes textuels dans les Livres stéréométriques* », pp. 32-71, en particulier pp. 45-54.
[47] Voir [Euclide-Vitrac, 2001], pp. 470-475.

des droites irrationnelles (Cf. Df X 3-4) et en précise l'espèce par rapport à la nomenclature détaillée exposée dans le Livre X, à savoir respectivement une mineure (a_{20}) et une apotomé (a_{12}).

Cela dit, à la fin de chacune de ces deux Propositions, il insère un porisme ou corollaire qui permettrait d'exprimer quantitativement a_{20} ou a_{12} en fonction de D[48]. Les relations (*) et les deux Porismes à Eucl. XIII 16-17 lui permettent très aisément d'exhiber les arêtes des cinq polyèdres réguliers dans la première partie de XIII. 18.



Soit AB le diamètre de la sphère donnée, C son milieu et D tel que AD = 2 DB.
• on vérifie que $AB^2 = (3/2).AF^2$; donc, par XIII 13c, AF = a_4.
• on vérifie que $AB^2 = 3BF^2$; donc, par XIII 15c, BF = a_6.
• on vérifie que $AB^2 = 2BE^2$; donc, par XIII 14c, BE = a_8.
On élève AG = AB ; on mène KH. On vérifie que CK > CD et on place L tel que KC = CL (donc au-delà de D). On élève LM. On joint MB.

On vérifie que $AB^2 = 5KL^2$. Donc, par XIII 16 Por., on en déduit que KL est rayon du cercle (= c_6) sur lequel est construit l'icosaèdre et que AK = LB est le côté du décagone (c_{10}) inscrit dans le même cercle. Comme KC = CL, on a KL = KH = LM et, par XIII 10, $[(c_6)^2 + (c_{10})^2 = (c_5)^2]$, on a donc : BM = $c_5 = a_{20}$.
Ensuite on coupe FB (= a_6) en extrême et moyenne raison en N avec BN > NF.
Par XIII 17 Por., on a donc : BN = a_{12}.
Par construction (grâce à III 7), on a donc : AF > AE = EB > BF > BM.
Soit : $a_4 > a_8 > a_6 > a_{20}$ (***), et, bien entendu : $a_6 > a_{12}$
Reste seulement à comparer a_{20} et a_{12}, *i.e.* BM et BN, seule comparaison qui ne découle pas immédiatement des constructions ainsi que nous l'avons dit un peu avant.

À ce point, deux particularités du texte grec de XIII 18 méritent d'être relevées car leur existence n'est probablement pas sans relation avec l'adjonction du Livre XIV :

48 Par exemple, le porisme à XIII 17 dit, en termes modernisés, que $a_6 = \Phi.a_{12}$, en notant Φ le nombre irrationnel appelé aussi nombre d'or [(1+√5)/2]. Voir *EHS*, IV, 180.15-17 : « Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά » (Alors, à partir de ceci, il est évident que, le côté du cube étant coupé en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est le côté du dodécaèdre).

1. Dans les traditions indirectes arabe et arabo-latine, on trouve en effet la triple inégalité (***), effectivement qualifiée d'évidente, puis on établit — en substance comme dans le texte grec — que BM > BN ($a_{20} > a_{12}$) en intercalant ML. Mais, dans le texte grec tel qu'il est transmis par les manuscrits conservés, on ne trouve pas vraiment la triple inégalité (***). En lieu et place, on lit la longue assertion suivante :

> « Et puisque le diamètre de la sphère a été démontré, d'une part hémiole en puissance du côté AF de la pyramide, d'autre part double en puissance du [côté] BE de l'octaèdre, et triple en puissance du [côté] FB du cube, donc, une chose telle que le diamètre de la sphère, en puissance, en [vaut] six, le [côté] de la pyramide en [vaut] quatre, celui de l'octaèdre trois, celui du cube, deux. Donc, d'une part le côté de la pyramide est, en puissance, épitrite du côté de l'octaèdre, d'autre part, en puissance, double de celui du cube; d'autre part celui de l'octaèdre [est], en puissance, hémiole de celui du cube. Et donc, d'une part lesdits côtés de ces trois figures, je veux dire, de la pyramide, de l'octaèdre et du cube, sont, l'un relativement à l'autre, dans des rapports exprimables. D'autre part les deux autres, je veux dire celui de l'icosaèdre et du dodécaèdre, ne sont, ni l'un relativement à l'autre, ni relativement aux précédents, dans des rapports exprimables; car ce sont des irrationnelles, l'une une mineure, l'autre une apotomé »,

qui en dit à la fois davantage et moins. Davantage, car des relations quadratiques (*), d'autres en sont déduites :

$$(a_4)^2 = 4/3\ (a_8)^2 = 2\ (a_6)^2\ ;\ (a_8)^2 = 3/2\ (a_6)^2. \quad (**),$$

qui permettent non seulement d'ordonner les arêtes (a_4, a_8, a_6) mais de préciser leurs *rapports* $a_4 : a_8$, $a_4 : a_6$, $a_8 : a_6$. Moins également, car rien n'est précisé au sujet de BF > BM ($a_6 > a_{20}$), inégalité très élémentaire d'après le théorème de l'hypoténuse (car BD > BL et FD > ML).

La longue assertion que nous venons de citer manque dans les traductions médiévales [lesquelles possèdent pourtant XIII 13-14-15 (c)] ; elle emploie en outre une terminologie non canonique, la notion de « rapports exprimables » qui est un hapax dans les *Éléments* (la notion d' « exprimabilité » y est réservée aux droites et aux aires). Ajoutons ici que cette portion, très certainement inauthentique, a dû être substituée au texte original après l'adjonction du Livre XIV, par souci de complétude. Entre les cinq polyèdres réguliers, il y a en effet 5 x 4 = 20 rapports du type $a_n : a_m$, mais, en tenant compte de l'inversion et du fait que les trois arêtes a_4, a_8, a_6 entretiennent des rapports numériquement exprimables, il suffit donc, pour les connaître tous, de déterminer les rapports de l'une des arêtes (a_4, a_8, a_6) avec (a_{12}, a_{20}) ainsi que le rapport $a_{12} : a_{20}$. Or $a_6 : a_{12}$ est facilement déterminé par le porisme à XIII 17 : on peut l'écrire, par exemple, $d_5 : c_5$ (d'après XIII 8) ou $c_6 : c_{10}$ (d'après XIII 9). Resterait donc à préciser $a_6 : a_{20}$ et $a_{12} : a_{20}$. Mais précisément XIV **4** et XIV **2** établissent respectivement : $a_6 : a_{20} :: \partial_1 : \partial_2$ et $a_{12} : a_{20} :: c_5 : c_3$. En combinant deux des principaux résultats du Livre XIV et la séquence substituée que nous avons rappelée, tous les rapports du type $a_n : a_m$ sont donc "connus". Remarquons en passant que l'inégalité omise dans l'état actuel de XIII 18 (BF > BM ou $a_6 > a_{20}$) est triviale à partir de XIV **4** car, par définition, $\partial_1 > \partial_2$.

2. Pour démontrer l'inégalité "difficile" de XIII 18 — « BM > BN ($a_{20} > a_{12}$) » —, Euclide exprime AD et FB en fonction de DB : $(AD)^2 = 4.(DB)^2$; $(FB)^2 = 3.(DB)^2$, ce qui montre que AD > FB, donc que AL > FB de beaucoup. Or, d'après ce qui a été vu auparavant, si l'on coupe AL [= $c_6 + c_{10}$, d'après XIII 16 Por.] en extrême et moyenne raison, le grand segment est KL [= LM = c_6, d'après XIII 9] et si l'on coupe BF (= a_6) en extrême et moyenne raison, le grand segment est BN [= a_{12}, d'après XIII 17 Porisme]. Le texte en déduit directement LM > BN, ce qui présuppose donc une forme faible du Lemme SEMR (si deux droites d et d' sont coupées en extrême et moyenne raison et si d > d', alors $s_1 > s'_1$) ; à partir de là, on a donc bien : MB > KL > BN (soit $a_{20} > c_6 > a_{12}$). Deuxième particularité du texte grec, on y propose une preuve *aliter* partielle à XIII 18, pour la seule inégalité « BM > BN ($a_{20} > a_{12}$) », en fait de « KL > BN ($c_6 > a_{12}$) », qui évite ce recours à la forme faible du Lemme SEMR indiquée. Son point de départ est l'égalité : $(AB)^2 = 3(BF)^2 = 5(KL)^2$, laquelle est aussi le point de départ de la preuve de XIV **2**.

Comme la substitution évoquée précédemment, cette preuve additionnelle n'existe pas dans les traditions indirectes médiévales et son insertion est donc probablement tardive. Mais elle paraît bien relever du même souci que celui que l'on observe dans le Livre XIV : compléter les lacunes déductives que comportaient les preuves des Propositions XIV **2-3-4** quand on les a envisagées dans la continuité des Livres I à XIII des *Éléments,* selon la même "philosophie" de la complétude déductive qui a conduit à enrichir massivement les Livres euclidiens authentiques[49], et qui, dans le Livre XIV, s'est traduit par deux attitudes en quelque sorte opposées :

- expliciter (tardivement) et démontrer le Lemme SEMR postposé, inséré en fin de Livre ;
- fournir d'autres preuves qui en dispensent, par exemple le groupe « Lemme XIV **3/3***alit* + XIV **3***alit* ». Cette tentative était assez illusoire car cette seconde preuve de XIV **3** repose elle aussi sur XIV **2** qui, elle-même, requiert ledit Lemme[50] !

Bien qu'il puisse s'agir de deux opérations indépendantes ou complémentaires — on trouve le groupe « Lemme XIV **3/3***alit* + XIV **3***alit* » ainsi que le Lemme SEMR dans toutes les versions —, il y a de bonnes raisons de croire que ni l'un ni l'autre n'appartenaient à la monographie initiale d'Hypsiclès. Qu'il y ait des connexions entre Livres XIII et XIV (au-delà de l'objet d'étude partagé) paraît bien établi. On peut même dire que l'adjonction du Livre XIV a interféré avec la transmission des Livres authentiques. Mais qu'en est-il, en amont, des motivations d'Hypsiclès lui-même ?

---

[49] Voir [Vitrac, 2004].

[50] Dans la version arabo-latine attribuée à Gérard de Crémone, on a voulu être davantage cohérent en proposant également une démonstration alternative à XIV **2** sans recourir au Lemme SEMR ; voir *infra,* III, § 3 et ANNEXE, Tableau 4, note 71.

5. Les prédécesseurs d'Hypsiclès

Le Livre XIV nous livre quelques précieuses informations concernant Apollonius et un autre géomètre impliqué dans les résultats qu'il contient, un certain Aristée. Entre la Proposition XIV **1** et le Lemme XIV **1/2** nous trouvons en effet la transition métamathématique suivante[51] qui complète en quelque sorte ce que la préface nous a déjà appris :

> « (*i*) Le même cercle comprend à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère.
> (*ii*) Ceci est établi par Aristée, dans son écrit *Sur la comparaison des 5 figures,* et, par ailleurs, Apollonius, dans la deuxième édition de sa *Comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre,* [a établi] que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi aussi est le dodécaèdre lui-même relativement à l'icosaèdre à cause du fait que
> (*iii*) c'est la même perpendiculaire [qui est menée] à partir du centre de la sphère sur le pentagone du dodécaèdre et sur le triangle de l'icosaèdre.
> (*iv*) Et nous-mêmes devons aussi établir que le même cercle comprend à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère, en ayant préalablement établi ceci ».

En supposant que ces informations soient exactes, l'assertion relative aux cercles circonscrits — $r_{12} = r_{20}$, ou, si l'on préfère, $a_{12} : a_{20} :: c_5 : c_3$ — avait donc déjà été établie par Aristée[52] dans un travail qui portait sur la comparaison des *cinq* figures régulières, et pas seulement sur celle des seuls dodécaèdre et icosaèdre inscrits dans la même sphère. Apollonius, dans ce qui est désigné ici comme *la seconde édition* de son ouvrage consacré à ces *deux* solides, en déduisait facilement un résultat, plutôt frappant quant à sa formulation : « $V_{12} : V_{20} :: S_{12} : S_{20}$ » mais qui n'est, à proprement parler, l'objet d'aucune Proposition du Livre XIV. Nous avons opté pour une interprétation minimale de l'assertion (ii), en sous-entendant "γράφεται" avant « ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου », mais il se peut bien, il est même assez probable, qu'Apollonius démontrait également le résultat d'Aristée[53]. Il n'est pas impossible non plus qu'Aristée en déduisait déjà le "corollaire"

[51] *EHM,* V, 6. 19—8.9 Heiberg (= *EHS,* V, 1, 4.4-17). Nous introduisons une division en 4 assertions pour en faciliter la discussion.
[52] Qu'il s'agisse du mathématicien cité par Pappus à propos du corpus analytique, d'Euclide et de la théorie des coniques, comme le croyait Pierre de la Ramée (voir *supra* note 15) ne va pas de soi dans la mesure où Pappus (634.9-10 Hultsch) mentionne un géomètre appelé Aristée l'Ancien (Ἀρισταῖος ὁ πρεσβύτερος), ce qui laisse à penser que le qualificatif sert à le distinguer d'un géomètre homonyme plus jeune. Or nous ne savons pas auquel des deux hypothétiques Aristée il faut attribuer la comparaison des cinq polyèdres réguliers citée dans notre cheville de transition.
[53] C'était l'interprétation de [Peyrard, 1818], p. 485. À noter qu'il est ici fait mention de « la deuxième édition » du traité d'Apollonius, là où la préface parlait d'un « autre livre ». Cette mention fait d'Apollonius l'"habitué" des éditions multiples, si on se rappelle ce qu'il dit lui-même dans sa préface au premier Livre des *Coniques.* C'est d'ailleurs la lecture qu'en fait [Dorandi, 2000], p. 83. Mais le cas des *Coniques* pourrait aussi être à l'origine d'une confusion, ou simplement d'une conjecture, de la part de l'auteur de cette remarque. Un

d'Apollonius, mais ce n'est pas dit dans notre assertion et nous n'avons pas d'indications indépendantes à ce sujet.

Il pourrait paraître quelque peu étonnant qu'Hypsiclès ait cru devoir (re-)démontrer le résultat d'Aristée (XIV **2**) mais pas celui d'Apollonius, alors que sa préface inscrit sa monographie dans la continuité du géomètre de Perge. Mais la différence d'attitude peut s'expliquer assez facilement : Hypsiclès connaissait le livre d'Apollonius, il l'avait consulté et étudié. Mieux encore, il était entre toutes les mains. Il était donc inutile de rapporter tous les détails de ses arguments. À l'inverse, il se pourrait que Hypsiclès n'ait pas consulté l'ouvrage d'Aristée et qu'il n'en ait peut-être qu'une connaissance indirecte, grâce à l'écrit d'Apollonius, dans la préface de celui-ci par exemple. Il n'est pas certain non plus que tout le monde y avait facilement accès. Et si Hypsiclès inclût le résultat d'Aristée dans sa monographie, c'est peut-être parce qu'il en avait élaboré une nouvelle preuve. Dans ce contexte, le résultat d'Apollonius apparaît comme un simple corollaire qu'il n'y avait pas lieu de re-démontrer.

Ni la préface, ni la cheville de transition à caractère historique citée *supra* ne permettent de préciser quelle a été exactement la contribution originale de Hypsiclès. Si l'on est pessimiste, compte tenu du fait que les solides réguliers avaient déjà été l'objet de travaux de la part de plusieurs de ses illustres prédécesseurs : d'abord Théétète, puis Euclide et Aristée, puis Archimède (au moins pour les polyèdres semi-réguliers), enfin Apollonius, on peut craindre que cette contribution soit à peu près nulle. Le verbe "ὑπομνηματίζω" serait alors à comprendre dans son sens de "commenter" ; Hypsiclès se serait contenté d'ajouter quelques Lemmes, peut-être de substituer des preuves remaniées à celles de ses prédécesseurs. C'est sans doute la raison qui a conduit certains interprètes à faire d'Hypsiclès un simple « éditeur », et d'autres à lui attribuer l'ensemble des Livres XIV et XV, en estimant que la plus grande part de l'inspiration mathématique du Livre XIV revenait, comme le dit Pierre de la Ramée, à Apollonius. Si l'on est optimiste, on admettra que les informations données dans la préface et la transition insérée entre XIV **1** et XIV **1/2** sont compatibles avec le fait que Hypsiclès ait pu donner une démonstration personnelle de XIV **2** et qu'on lui doive la formulation et la preuve des Propositions XIV **3** et **4** telles qu'elles nous ont été transmises.

6. De la monographie d'Hypsiclès au Livre XIV

Quoi qu'il en soit, il paraît clair qu'il faudra distinguer — ce qui n'est généralement pas fait — entre l'écrit original d'Hypsiclès et le Livre XIV tel qui nous a été transmis, lequel représente une version postérieure remaniée. Le contenu de la préface que nous avons résumé plus haut ne plaide pas en faveur de la thèse selon laquelle il aurait été rédigé pour compléter les *Éléments*. Ce traité n'y est même pas cité, non plus que son auteur et

« autre Livre » d'Apollonius aurait pu avoir un thème plus large, par exemple la comparaison des cinq polyèdres réguliers, à l'instar d'Aristée, et pas seulement celle des seuls dodécaèdre et icosaèdre, comme l'écrit analysé par le père d'Hypsiclès et son ami Basilide.

— à moins de faire l'hypothèse *ad hoc* que cela allait de soi — la motivation première d'Hypsiclès n'apparaît pas comme celle d'écrire un quatorzième Livre pour compléter les *Éléments.* L'une des particularités du traité d'Euclide est de ne présupposer aucune connaissance géométrique préalable et aucun mathématicien grec quelque peu compétent ne pouvait l'ignorer. Et donc les "manquements" que l'on peut relever dans la structure déductive du Livre XIV quand on l'envisage dans cette perspective ne vont donc pas non plus en ce sens.

S'il a été inséré tardivement à la suite des *Éléments,* s'il n'a pas été conçu dans l'intention de compléter le traitement des polyèdres du Livre XIII, il est probable que cette adjonction ait été accompagnée d'un certain nombre d'opérations de type éditorial, opérations volontaires qu'il convient de distinguer des effets de la transmission ultérieure dudit Livre, parfois accidentels, parfois résultant d'une stratégie exégétique, selon les vicissitudes propres à une transmission manuscrite. Si nous comparons le style du Livre XIV (en laissant de côté la préface) avec celui des *Éléments* I-XIII ou avec les traités géométriques d'Archimède, on s'aperçoit facilement qu'ils coïncident assez bien en ce qui concerne les Propositions XIV **1-4**, mais que le texte transmis comporte également des passages nettement moins formulaires, parfois de caractère métamathématique ou historique. C'est le cas de la double récapitulation finale et des différentes chevilles de transition dont nous avons d'ailleurs cité la plus importante ci-dessus. Or, dans les textes mathématiques grecs anciens, les considérations paramathématiques de ce genre sont attestées dans les écrits des époques romaine et tardive, à partir de Héron et Ptolémée par exemple, y compris en dehors des préfaces, et elles deviennent omniprésentes chez les commentateurs.

En admettant donc que l'adjonction des Livres XIV-XV ait été tardive, il est tentant de considérer tout ce qui ne paraît pas géométriquement "canonique" comme postérieure à ladite adjonction. Par défaut, un noyau mathématique cohérent, de style euclidien, se trouvera circonscrit, dont on espère qu'il correspondra peu ou prou à la monographie d'Hypsiclès. Mais une telle hypothèse de travail pose alors immédiatement la question de la "fin" de ladite monographie. L'intérêt du résultat de XIV **4**, quand on le combine aux précédents, est évidemment de caractériser le rapport des deux polyèdres, en volume comme en surface, à l'aide de la section d'une droite en extrême et moyenne raison. D'où une possible coquetterie de géomètre qui consiste à en réserver la formulation pour un corollaire. C'est ce qui est fait, par exemple, dans les *Éléments* eux-mêmes pour un des résultats attribués à Eudoxe (XII 7 Por.) et par Archimède, dans son traité de *la Sphère et du cylindre* (*SC* I 34 Por., 39 Por.).

Pour notre part, nous croyons donc que la monographie d'Hypsiclès s'achevait par une sorte de porisme qui combinait les résultats de ses Proposition(s) avec le "corollaire" d'Apollonius, soit quelque chose comme la triple proportion :

$$« V_{12} : V_{20} :: S_{12} : S_{20} :: (a_6 : a_{20}) :: \partial_1 : \partial_2 »,$$

soit, plus simplement, la proportion « $V_{12} : V_{20} :: \partial_1 : \partial_2$ », dont on a l'écho dans les deux formes de la récapitulation finale. À partir de là, il est aisé de concevoir que lorsque le succès éditorial de l'écrit d'Apollonius faiblit — au bout du compte ce texte est désormais perdu —, ou quand le niveau du lectorat visé changeât — au moment où l'on convertit la monographie d'Hypsiclès en Livre XIV (?) —, un traitement autonome fut perçu comme nécessaire. Il fallait justifier la présence du rapport ($V_{12} : V_{20}$) qui ne figure ni dans XIV **3**, ni dans XIV **4**. De cette inquiétude témoigne l'énoncé de XIV **5** :

> « Et *il faut démontrer* que comme le côté du cube [est] relativement à celui de l'icosaèdre, ainsi [est] le volume du dodécaèdre relativement au volume de l'icosaèdre ».

Deux attitudes sont envisageables et se retrouvent d'ailleurs dans le texte :

- L'une consiste à indiquer que le résultat d'Apollonius est une conséquence simple de celui d'Aristée, d'où des explications postposées plus ou moins détaillées que l'on trouve déjà dans l'assertion (*iii*) de la transition métamathématique intercalée entre XIV **1** et XIV **1/2** :

> « … à cause du fait que c'est la même perpendiculaire [qui est menée] à partir du centre de la sphère sur le pentagone du dodécaèdre et sur le triangle de l'icosaèdre »

ou vers la fin de la récapitulation, 1 :

> « … à cause du fait qu'à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre sont compris par le même cercle (διὰ τὸ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιλαμβάνεσθαι τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον) ».

- L'autre — celle de l'étrange Proposition XIV **5** — explicite les détails de cette déduction à l'aide de résultats très élémentaires des *Sphériques* de Théodose et d'une Proposition sur les pyramides qui n'est ni *Él.,* XII 5 (bases triangulaires), ni l'inauthentique XII 6 (bases polygonales), mais une combinaison des deux (en s'abstenant de préciser la nature des bases).

Comme il vient d'être démontré, dans XIV **3**, que « comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi est le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre », il est clair que XIV **5** se réduit à la conjonction de XIV **3** et du résultat attribué à Apollonius ($S_{12} : S_{20} :: V_{12} : V_{20}$). Sa preuve est une justification, plutôt maladroite, dudit résultat. Nous la qualifions d'"étrange", car XIV **5** n'a pas la structure habituelle d'une proposition géométrique : elle ne possède ni diagramme, même sommaire, ni exemplification, ni donc désignation des objets par des lettres … Cela n'a pas empêché ceux qui ont découpé le texte grec d'en faire une Proposition[54].

---

[54] Voir ANNEXE, Tableau 2.

Dans cette hypothèse, la Proposition XIV **5** ($a_6 : a_{20} :: V_{12} : V_{20}$) n'est donc peut-être rien d'autre que l'aboutissement de l'amplification d'un Porisme récapitulatif[55], avant l'adjonction d'autres portions inauthentiques qui suivent. Toute la fin du Livre représenterait donc un ensemble stratifié d'ajouts et de justifications inauthentiques. De ces différents enrichissements, certains visaient à rappeler et justifier le résultat d'Apollonius et à rendre compte de l'occurrence du rapport des volumes des deux polyèdres, tandis que l'adjonction de Lemmes procédait d'un autre souci : saturer la structure déductive du Livre XIV. C'est le cas du Lemme SEMR, requis dans les trois résultats principaux XIV **2-3-4** et clairement ajouté ultérieurement. Un autre résultat — nous l'avons appelé[56] XIII 9^{bis} —, non établi dans les *Éléments,* intervient également dans XIV **2** et **4**. Il existe dans la tradition indirecte médiévale des Livres additionnels (sa place d'insertion varie selon les versions). Il n'est pas inconnu en grec : on le trouve chez Pappus et dans une scholie du manuscrit ***M*** à la Proposition XIV **2**, mais le texte grec, du moins tel qu'il nous est parvenu, à la différence du Lemme SEMR, ne l'a pas transmis en tant que Proposition à part entière.

Rappeler certains résultats, identifier et combler des lacunes déductives exigent bien entendu une compréhension minimale du texte et quelques compétences mathématiques. Nous ignorons si les hypothétiques enrichissements que nous avons décrits dans ce qui précède sont le fait d'une seule personne ou de plusieurs, s'il s'agit ou non du disciple d'Isidore auteur de la troisième partie du Livre XV, si les érudits responsables de la composition du ou des manuscrits de la translittération byzantine ont joué un rôle ou non dans cette affaire … Quoi qu'il en soit, dans l'hypothèse où il se serait agi, avec le Livre XIV, de compléter XIII. 18, le texte grec des Livres additionnels n'est ni satisfaisant du point de vue logique, ni complet quant au contenu mathématique.

Rien n'est dit de la surface et du volume des tétraèdres, cubes et octaèdres, alors qu'il est très facile d'établir[57], par exemple, que $r_6 = r_8$, ou, si l'on préfère, $a_6 : a_8 :: c_4 : c_3$, résultat frappant et analogue à XIV **2** pour le cube et l'octaèdre inscrits dans une même sphère, résultat qu'Aristée avait sans doute produit dans sa *Comparaison des cinq figures,* avec comme corollaire évident que « $V_8 : V_6 :: S_8 : S_6$ ». Rien n'indique qu'il se trouvait dans les monographies d'Apollonius et d'Hypsiclès[58]. Même le (ou les) responsable(s) de

---

[55] Ce genre de transformation d'un Porisme en Proposition n'est pas rare dans l'histoire du texte des *Éléments.* Voir [Vitrac, à paraître].

[56] Voir [Euclide-Vitrac, 2001], p. 411 et *infra,* III § 2.

[57] Puisque $D^2 = 2(a_8)^2 = 3(a_6)^2$ [XIII 14c-15c], que $(a_8)^2 = 3(r_8)^2$ [XIII 12] et que, de manière triviale, $(a_6)^2 = 2(r_6)^2$, on en déduit immédiatement $D^2 = 6(r_8)^2 = 6(r_6)^2$, et donc $r_6 = r_8$. Au passage, on voit que la droite introduite dans l'interpolation substituée dans le texte de XIII 18 rappelée plus haut (« une chose telle que le diamètre de la sphère, en puissance, en [vaut] six ») n'est autre que le rayon du cercle circonscrit au triangle de l'octaèdre et au carré du cube, ceux inscrits dans cette même sphère.

[58] Plusieurs auteurs du XIII^e s., tels Campanus ou al-Maghribī, transmettent des résultats complémentaires de ce genre dans leurs recensions ; al-Maghribī et l'auteur d'un texte hébraïque apparenté proposent même une comparaison systématique des *cinq* polyèdres réguliers. Voir *infra,* III, § 5. L'égalité $r_6 = r_8$ était déjà établie par Pappus dans le Livre III de la *Collectio,* 150.11-13 Hultsch.

l'adjonction des Livres additionnels ne semble(nt) pas avoir perçu l'incomplétude fondamentale du texte qu'il(s) avai(en)t ainsi engendré. La motivation de l'opération n'était certainement pas de produire un compétent travail de complétion mathématique, mais plutôt de réaliser une sauvegarde patrimoniale en liant la destinée desdits Livres à celle des *Éléments*.

7. La tradition indirecte grecque des témoignages

Pour compléter l'apport de la tradition directe d'un texte grec donné, pour remonter au-delà de l'archétype des manuscrits conservés, deux ou trois types de sources sont envisageables : (i) les mentions explicites dudit texte ; (ii) les citations implicites, mais indubitablement identifiables comme telles ; (iii) les traductions et recensions médiévales. Un témoignage explicite sera d'autant plus précieux qu'il est plus ancien et proche de l'auteur, mais force est de constater que, dans le cas des livres additionnels, notre dossier est très pauvre.

À notre connaissance, il n'y a aucune mention du Livre XV dans la littérature grecque antique et nous n'avons trouvé qu'une mention d'Hypsiclès en relation avec le Livre XIV dont il n'est même pas certain qu'elle soit antique plutôt que byzantine. Dans le cas du Livre XV, la chose n'est pas étonnante puisque, comme nous l'avons vu en rappelant les thèses de Heiberg, il s'agit très certainement d'un des derniers écrits mathématiques de l'Antiquité qui dès lors n'avait guère de chance d'être cité. Pour le Livre XIV, ou plutôt pour la monographie d'Hypsiclès qui en constitue l'origine, les choses sont un peu différentes, mais il faut garder à l'esprit que nos deux opuscules sont quand même très spécialisés. Il semble que deux contextes seulement permettaient d'y faire référence :

- une éventuelle discussion de l'extension des *Éléments* d'Euclide et du nombre des livres qui les composent.
- l'examen du thème des polyèdres réguliers, communs aux Livres XIII, XIV, XV, ainsi que la riche exégèse du *Timée* et le rôle cosmologique que la tradition faisait jouer à ces solides.

La mention des polyèdres réguliers n'est pas un phénomène rare dans la littérature savante ancienne. Mais qu'ils soient commentateurs de Platon, d'Aristote, d'Euclide ou de Ptolémée, les auteurs préfèrent :

- mettre l'accent sur l'identité des hypothétiques premiers protagonistes de leurs études (Théétète, Aristée, Euclide, Zénodore et Archimède dans le meilleur des cas, Pythagore, Hippase, le mystérieux Timée de Locres … chez les plus spéculatifs)[59].
- évoquer leurs constructions et leurs propriétés, comme Platon lui-même l'avait fait, d'une manière non technique. Une topique connut un grand succès : la propriété extrémale de la sphère et l'ordre croissant des polyèdres isépiphanes en fonction du

[59] Voir les références que nous donnons dans [Euclide-Vitrac, 2001], pp. 19-21 et 95-106.

nombre de faces[60]. Mais les commentateurs d'obédience philosophique, par exemple Plutarque ou Galien, se gardent d'entrer dans les détails.

C'est d'ailleurs ce que leur reproche Pappus dans le Livre V de sa *Collectio* dont l'un des objectifs est précisément d'offrir un traitement technique de la question des figures isopérimétriques et isépiphanes[61]. Il reconnaît explicitement faire usage de sources plus anciennes, mais il ne cite jamais Hypsiclès.

Un autre contexte technique aurait pu permettre de mentionner certains résultats du Livre XIV : celui de la mesure des polyèdres réguliers, traitée dans *Métriques* II, 16-19. Mais là aussi, Héron s'abstient de citer Hypsiclès. Le seul témoignage grec sur ce dernier en tant qu'auteur du Livre XIV que nous connaissions a cependant un parfum héronien. Dans un problème que Heiberg a édité comme section **24**.32 des *Geometrica,* l'auteur se propose de calculer le diamètre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de 30 pieds de côté. Pour ce faire, il utilise une conséquence de Eucl. *Él.* VI 8 et du fait que la hauteur du triangle, prolongée, constitue le diamètre du cercle circonscrit : le côté du triangle est donc moyenne proportionnelle entre la hauteur et le diamètre. Cette inférence simple a semble-t-il échappé à un scholiaste qui entreprend une justification aussi complexe qu'érudite, au cours de laquelle il affirme[62] :

> « ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου διπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, ὡς ὁ Ὑψικλῆς ἐν τῷ πρώτῳ τῶν εἰς Εὐκλείδην ἀναφερομένων ἐπορίσατο καὶ Πάππος ἀπέδειξεν » (car le rayon est double de la [perpendiculaire menée] à partir du centre sur la base du triangle, comme Hypsiclès l'a posé comme corollaire au premier [théorème] des [Livres] ajoutés à Euclide et comme Pappus l'a démontré).

Il s'agit indiscutablement d'une mention explicite de l'ajout à XIV **1** que certains manuscrits présentent (à tort) comme un Porisme[63], reformulé par Pappus en tant que Lemme 4 dans sa section consacrée à la comparaison des polyèdres isépiphanes[64]. La formulation du scholiaste est d'ailleurs celle de Pappus, pas celle du Livre XIV. Il est peu probable que cette scholie ait eu un modèle antique : elle est insérée au f°8ʳ du *codex Constantinopolitanus palatii ueteris* n°1 (ou *Seragliensis* G.I.1), Xᵉ s., dans une compilation transmise sous le titre *Εὐκλείδου γεωμετρία* (*Géométrie d'Euclide*), mais par une main tardive. Le même problème est reproduit une seconde fois dans le même manuscrit (f°35ʳ), cette fois sans scholie. Il existe également dans le *Vatican. Gr.* 215 (f°7ʳ), XIᵉ s., là encore sans la scholie. Son seul mérite est d'avoir perçu la possibilité d'un rapprochement entre Hypsiclès et Pappus. Elle nous invite à regarder si ladite

---

60 Pour un inventaire des témoignages sur ce thème, voir [Acerbi, Vinel, Vitrac, 2010], pp. 92-102 et Annexe 1, pp. 160-176.

61 *Papp. Coll.* V, 350.20-30.

62 Voir [Héron-Heiberg, 1914], vol. V, p. 223.23–p. 224.7.

63 D'où notre choix de traduction quelque peu forcé pour « ἐπορίσατο ». Voir comm. *ad loc.*

64 Voir *Papp. Coll.* V, 416. 17—418.2.

section de *Collectio* V, à défaut de livrer une mention explicite d'Hypsiclès, ne pourrait pas contenir une ou des citations implicites du Livre XIV.

Auparavant, qu'en est-il des discussions antiques de l'extension des *Éléments* d'Euclide ? S'il semble qu'aucun écrit mathématique antique ne cite les Livres XIV ou XV en tant que tels, les témoignages concernant le nombre de livres que comportait l'écrit d'Euclide ont, du moins, le mérite d'exister. Mais ils sont rares et passablement tardifs. En 517, commentant un célébrissime passage du traité de la *Physique* (II, 2, 193 b22—194 a11) dans lequel Aristote, après avoir déterminé en combien de sens s'entend le terme "nature", revenait sur la distinction entre mathématique et physique, ou, plutôt entre le mathématicien et le physicien, Jean Philopon affirme que le Stagirite, contrairement à l'opinion traditionnelle (qui opposait mathématique et physique respectivement comme « science de la forme des choses » et « science de la substance »), les distingue par leur manière de mener leurs recherches, selon qu'ils font ou non, abstraction de la matière[65]. Pour illustrer son assertion, il explique les différences qui existent entre les traitements d'un même sujet — en l'occurrence la forme sphérique du Ciel — proposés par trois auteurs : Théodose, Autolycos et Euclide. Le premier, dans ses *Sphériques,* traite la sphère en géomètre ; le deuxième se rapproche du physicien car sa sphère est en mouvement, même s'il n'indique rien au sujet de sa substance. Mais les *Phénomènes* d'Euclide offrent un traitement plus particulier encore car, « au lieu de simplement examiner le mouvement de la sphère, on y considère le mouvement de la sphère des fixes, ou celui de la sphère de Saturne, ou celui de n'importe quelle sphère, ainsi que la position relative de ces sphères entre elles ». Il conclut sa description par cette remarque[66] :

> « καὶ ἔστι τὸ μὲν ἀκρότατον τῆς μαθηματικῆς εὐδιάκριτον καὶ κεχωρισμένον τῆς φυσιολογίας (οἷά ἐστι τὰ Θεοδοσίου Σφαιρικά, τὰ Εὐκλείδου ιγ´ βιβλία, τὰ ἀριθμητικά· παντελῶς γὰρ ἐν τούτοις ὕλης οὐδεμία μνήμη), τὸ δὲ περιπέζιον αὐτῆς πως ἐγγύς ἐστι τῆς φυσιολογίας » (Il existe donc une mathématique de très haut niveau, facile à discerner et nettement séparée de la physique (par exemple les *Sphériques* de Théodose, les *treize* livres d'Euclide, les *Arithmétiques*[67] : il n'y est jamais fait mention de la matière), et une mathématique plus terre-à-terre, qui se rapproche plus ou moins de la physique).

Par contraste, si la description de la "fin" des *Éléments* que fait Proclus dans son commentaire au premier Livre correspond bien avec ce que nous connaissons — la

---

[65] Voir *In Arstt Phys., CAG* 16, 1887, 218-222 Vitelli. Traduction française dans [Autolycos-Aujac, 1979], pp. 150-156 (*Testimonia*).
[66] *Op. cit.,* 220.14-17 Vitelli. Traduction française G. Aujac, *op. cit.,* p. 153, légèrement modifiée.
[67] Et non pas : « Euclid's thirteen books on arithmetic » comme le traduit A.R. Lacey (Philoponus, *On Aristotle Physics 2.* London, Duckworth, 1993, p. 33). Il s'agit très probablement d'une mention des *Arithmétiques* de Diophante, même si l'auteur n'est pas précisé. Il ne peut s'agir des Livres arithmétiques des *Éléments* déjà comptés dans les 13 (et qui ne sont que 3 !).

construction des polyèdres réguliers, dans XIII 13-17[68] —, il ne donne aucune indication en termes de Livres ou de numéros de Proposition. Un peu plus loin, lorsqu'il détermine le but (σκοπός) du traité[69] quand on le rapporte à l'objet de recherche, le Diadoque précise qu'Euclide finit par la construction séparée de chacune des figures cosmiques, mais montre aussi qu'elles sont toutes inscriptibles dans une sphère et précise le rapport mutuel qu'elles entretiennent (καὶ τοὺς λόγους οὓς ἔχει πρὸς ἄλληλα παραδιδούς), ce qui correspond donc à XIII 18[70]. Là encore, pas de référence livresque explicite.

Son disciple et biographe, Marinus de Naplouse, plus âgé que Philopon de quelques décennies, rédigeant une sorte d'introduction au traité des *Data* d'Euclide dans laquelle il s'efforce d'expliquer ce qu'il en est de la notion de « donné(e) », présente son auteur en énumérant les œuvres de celui-ci, fournissant une mention explicite des 13 Livres d'*Éléments* de géométrie[71] :

> « πάσης γὰρ σχεδὸν μαθηματικῆς ἐπιστήμης στοιχεῖα καὶ οἷον εἰσαγωγὰς προέταξεν, ὡς γεωμετρίας μὲν ὅλης ἐν τοῖς ιγ´ βιβλίοις καὶ τῆς ἀστρονομίας ἐν τοῖς **Φ**αινομένοις, καὶ μουσικῆς δὲ καὶ ὀπτικῆς ὁμοίως στοιχεῖα παραδέδωκεν· καὶ δὴ καὶ τῆς περὶ τοῦ δεδομένου πάσης πραγματείας ἐν τῷ προκειμένῳ βιβλίῳ στοιχείωσιν ἀναλυτικὴν ἐποιήσατο »
>
> (Il (Euclide) a en effet proposé les éléments et pour ainsi dire l'initiation à presque toute la science mathématique ; il l'a fait pour la géométrie dans ses *treize* livres et pour l'astronomie dans les *Phénomènes* ; il nous a aussi transmis de même les éléments de la musique et de l'optique. Et de même, pour le *Datum,* il a exposé dans le livre en question la base du traitement de cette discipline par la méthode analytique).

Auparavant, des résultats spécifiques des *Éléments* (en particulier tirés des Livres stéréométriques) avaient été cités par des auteurs plus anciens : Euclide *Él.* XI 2 par Galien[72], *Él.* VII 22, VII 27, X 5, XI 5 par Alexandre d'Aphrodise[73] ; on peut leur adjoindre la *Collectio* de Pappus qui fait abondamment références aux Livres XI-XIII … Mais ni Pappus, ni Théon (ce dernier mentionne explicitement VI 33, XIII 10, 12) n'ont cru utile de préciser que les *Éléments* étaient bien en 13 Livres. Cela allait sans doute de soi ! On pourrait être tenté de voir, dans les précisions explicites de Marinus et Jean Philopon, un indice du fait que, désormais (fin V^{e} - début VI^{e} s.), certaines versions comportaient un nombre total de livres plus important, bref, qu'elles incluaient nos livres additionnels XIV et XV. Mais c'est un argument *a silentio* de peu de poids.

---

[68] *Pr.,* 68.21-23 Friedlein.
[69] *Ibid.* 70.25—71.2 Friedlein.
[70] Si l'on prend son expression au pied de la lettre, il semble que Proclus connaissait déjà la version de XIII. 18 dans laquelle on avait substitué l'expression des *rapports* entre les trois polyèdres "simples" à la simple triple *inégalité* entre les arêtes que nous avons notée *supra* (***).
[71] *In Eucl.* Data, 254.16-22 Menge. Traduction dans [Michaux, 1947], p. 64, légèrement modifiée.
[72] *De Usu partium* X, 13, 829.10-830.15 Kühn (= II, 104-105 Helmreich).
[73] Respectivement : *In Arstt anal. pr. lib. I comm., CAG,* 260.28-29 Wallis ; *ibid.,* 260.33—261.2; *ibid.,* 260.22-25 ; *In Arstt meteor. lib. comm., CAG,* 145.1-4 Hayduck.

Qui plus est, la redécouverte assez récente (1970) de la version arabe d'un commentaire de Galien au traité hippocratique *Airs, Eaux, Lieux,* perdu en grec, permet peut-être de remonter la première mention des *Éléments* en *13* Livres au IIe siècle de notre ère :

> « (16) Quant à la géométrie, la plupart des <astrologues> romains l'ont apprise et l'enseignent. Et ils en instruisent les adolescents et les enfants d'une manière concise, à cause de leur évidente indigence <dans cette science>.
>
> (17) Certains d'entre eux connaissent seulement les treize Livres <d'Éléments> qu'a rédigés Euclide … »[74],

à condition bien entendu que cette précision numérique ne soit pas l'ajout d'un érudit arabe[75].

8. Pappus d'Alexandrie, *Collectio* V : un témoignage implicite ?

Le Livre V de la *Collection* est consacré à l'étude des figures isopérimétriques et isépiphanes. Malgré cette unité thématique proclamée dès la célèbre préface, il est facile d'y distinguer (au moins) trois parties :

- Un traité des figures isopérimètres et isépiphanes dont le contenu, dans les grandes lignes, est le même que celui du compte-rendu inséré par Théon d'Alexandrie dans son commentaire au premier livre de l'*Almageste* et motivé par une courte remarque de Ptolémée[76]. La source, selon (le seul) Théon, en est le traité *Sur les figures isopérimétriques* de Zénodore[77]. Un exposé semblable a aussi été inclus dans les Prolégomènes à *l'Almageste,* très probablement composés à la même époque et dans le même milieu que notre Livre XV. Les trois versions sont suffisamment distinctes pour exclure toute filiation directe entre elles, mais suffisamment proches pour que l'on postule un même exposé antérieur qui leur a servi de source[78]. Il est en outre à peu près certain que Pappus lui-même avait commenté l'assertion de Ptolémée à l'origine de la très longue glose de Théon dans son propre commentaire, désormais perdu, au premier livre de l'*Almageste*.

---

[74] Livre III, Ch. 11. Traduction d'après l'édition dans [Toomer, 1985], p. 196.

[75] Selon Toomer, certaines additions sont détectables dans ce texte, notamment l'une concernant l'astronome Ptolémée décrit comme « roi d'Égypte ».

[76] [Ptolémée-Heiberg, 1898-1903], vol. I, p. 13.16-19 : « ὡσαύτως δ' ὅτι, τῶν ἴσην περίμετρον ἐχόντων σχημάτων διαφόρων ἐπειδὴ μείζονά ἐστιν τὰ πολυγωνιώτερα, τῶν μὲν ἐπιπέδων ὁ κύκλος γίνεται μείζων, τῶν δὲ στερεῶν ἡ σφαῖρα […] » (de la même façon, puisque parmi les figures différentes qui ont un périmètre égal, la plus polygonale est plus grande, le cercle est plus grand que les <figures> planes, la sphère que les solides […] »).

[77] [Théon-Rome, 1936], Tome II, p. 355.3–p. 379.15, en particulier 355.3-4 pour la citation de Zénodore.

[78] Pour la comparaison détaillée de ces trois exposés, voir [Acerbi, Vinel, Vitrac, 2010], notamment le tableau pp. 108-109 et les commentaires qui s'y rapportent. Le lecteur y trouvera aussi une nouvelle édition du texte grec, une traduction française et des notes de commentaires de la version anonyme.

• Une série de Propositions (20-37) destinées à démontrer autrement des résultats établis par Archimède dans le premier livre du traité *Sur la sphère et le cylindre,* notamment *SC* I 33, 34 et précédemment utilisées dans la comparaison de la sphère avec les polyèdres réguliers, les cônes et les cylindres isépiphanes.
• La dernière partie, qui nous intéressera principalement ici, établit que les cinq polyèdres réguliers, si on les suppose isépiphanes, sont, quant au volume, dans l'ordre croissant du nombre des faces :

> « Καὶ τὰ μὲν περὶ τῶν ὑπὸ᾽ Αρχιμήδους δειχθέντων ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου τοσαῦτ ᾽ ἐστίν, ἑξῆς δὲ τούτοις γράψομεν, ὡς ὑπεσχόμεθα, τὰς συγκρίσεις τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων πέντε σχημάτων, πυραμίδος τε καὶ κύβου καὶ ὀκταέδρου δωδεκαέδρου τε καὶ εἰκοσαέδρου [καὶ τὴν ἔφοδον τῶν ἀποδείξεων ἐχούσας], οὐ διὰ τῆς ἀναλυτικῆς λεγομένης θεωρίας, δι᾽ ἧς ἔνιοι τῶν παλαιῶν ἐποιοῦντο τὰς ἀποδείξεις [τῶν προειρημένων σχημάτων], ἀλλὰ διὰ τῆς κατὰ σύνθεσιν ἀγωγῆς ἐπὶ τὸ σαφέστερον καὶ συντομώτερον ὑπ ᾽ ἐμοῦ διεσκευασμένας [ἐπεὶ καὶ τὰ λήμματα πάντα μικρά τε καὶ μεγάλα διὰ τοὺς πολλοὺς τῶν φιλομαθούντων κατέταξα τὸν ἀριθμὸν ἑκκαίδεκα, ὧν ἐστιν ἐνταῦθα χρεία]. προγράφεται δὲ [τῶν συγκρίσεων] τάδε »
>
> (Au sujet des choses démontrées par Archimède dans le traité *De la Sphère et du Cylindre*, il en est ainsi ; et, à leur suite, comme nous l'avions promis[79], nous allons traiter des comparaisons des cinq figures ayant une surface égale : pyramide et cube et octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre [et elles suivent une démarche de preuve] non pas grâce à la méthode dite analytique, par laquelle certains des Anciens produisirent les démonstrations [des figures susdites], mais par la démarche selon la synthèse pour atteindre, dans l'exposé fait par nous, la plus grande clarté et la plus grande concision. [Mais puisque les lemmes, grands et petits, dont on a besoin ici, pour la plupart de ceux qui désirent s'instruire, ont été mis en ordre au nombre de seize], introduisons préalablement [aux comparaisons] ce qui suit)[80].

La première partie du Livre V dérivait, en dernière analyse, de Zénodore, la deuxième est archimédienne quant à l'inspiration ; pour la troisième, Pappus admet que son traitement a eu des précédents analytiques, probablement hellénistiques. Malheureusement il ne précise pas qui étaient ces Anciens, ni quelles sont ses sources. Les comparaisons des solides proprement dites sont l'objet des propositions 52 à 56 (voir tableau *infra*). La proposition V 54 n'était pas indispensable puisque la conjonction de V 55 et 56 montre que si un icosaèdre et un octaèdre sont isépiphanes, le dodécaèdre de même surface s'intercale entre eux quant au volume[81].

---

[79] L'annonce avait été faite par Pappus à la suite de la Proposition 18, l'avant-dernière de la partie I du Livre V.
[80] *Papp. Coll.* V, 410.22-412.7. Traduction française P. Ver Eecke, pp. 315-316.
[81] Mais la preuve de V 54 est plutôt simple car les deux solides sont composés de faces triangulaires équilatérales, donc semblables et donc $f_{20} : f_8 :: (a_{20})^2 : (a_8)^2$.

V 52	Si $S_6 = S_4$, alors $V_6 > V_4$ (utilise V 38b)
V 53	Si $S_8 = S_6$, alors $V_8 > V_6$ (utilise V 38a ; 39)
V 54	Si $S_{20} = S_8$, alors $V_{20} > V_8$ [utilise V 43 ; 53^p, en fait $(a_8)^2 = 6(p_8)^2$]
V 55	Si $S_{20} = S_{12}$, alors $V_{20} > V_{12}$ (Conséquence *quasi* immédiate de la conjonction V 48-49)
V 56	Si $S_{12} = S_8$, alors $V_{12} > V_8$ [utilise V 43 ; 51 ; 53^p, en fait $(a_8)^2 = 6(p_8)^2$]

Quant à V 57, elle synthétise les Propositions 52 à 56 (si $S_{20} = S_{12} = S_8 = S_6 = S_4$, alors $V_{20} > V_{12} > V_8 > V_6 > V_4$) et justifie à nouveau en détails qu'il n'y a pas d'autres solides réguliers que les cinq figures qui viennent d'être mutuellement comparées[82].

Les quatorze Propositions qui précèdent sont donc les lemmes annoncés. Pappus (ou son "éditeur"[83]) parlait de 16 Lemmes parce qu'on trouve deux démonstrations alternatives, pour les Propositions 39 et 48 qui ont été numérotées en tant que Lemmes (N°3 et 13 respectivement). Si on examine la structure déductive de cette troisième partie du Livre V telle qu'elle est résumée dans le schéma ci-dessous, on voit tout de suite qu'il y a donc trois groupes principaux de Propositions lemmatiques :

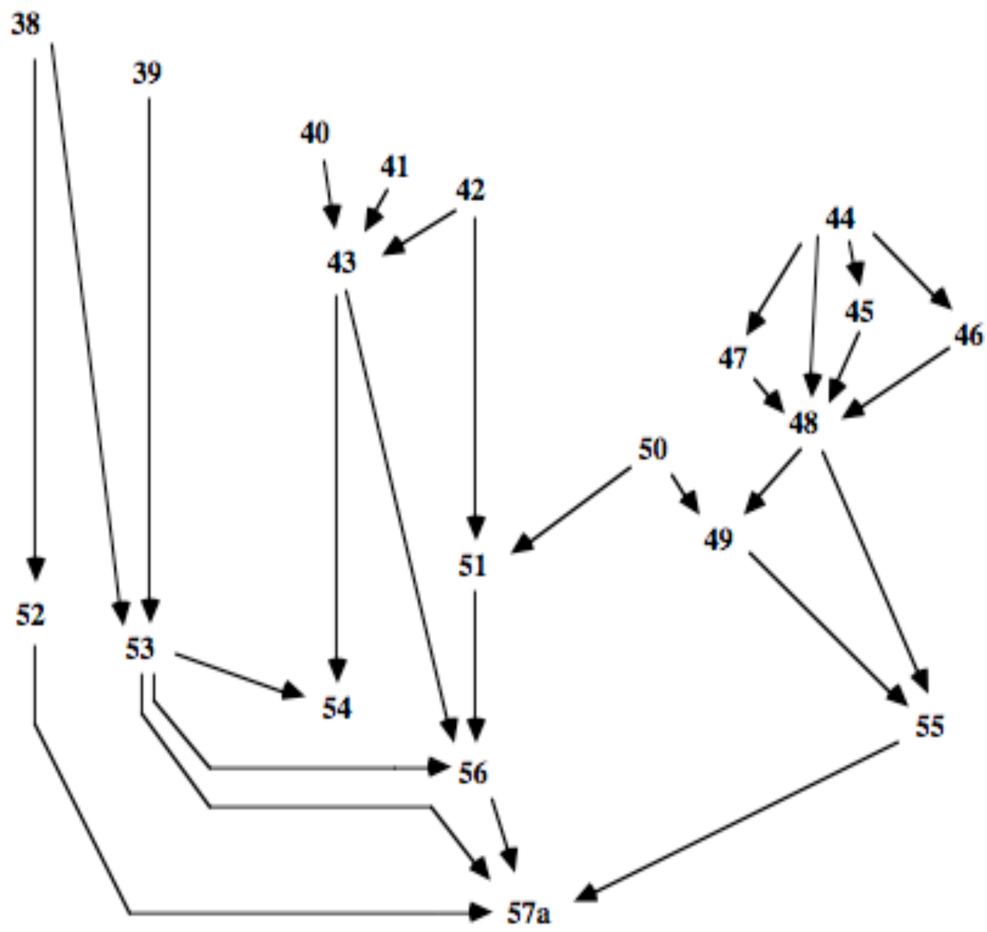
- V 38-39 en vue d'établir V 52-53, comparaisons directes de V_8, V_6, V_4, fondées sur les relations données dans *Él.* XIII 12, 13c, 14c, 15c [que nous avons notées (*)].
- V 40-41-42-43-50-51 en vue d'établir V 54, V 56 (on pourrait répéter V 38a-39, utilisées pour V 53, qui intervient elle-même dans V 54).
- V 44-45-46-47-48-49-50 en vue d'établir V 55 (si $S_{20} = S_{12}$, alors $V_{20} > V_{12}$), dont V 44-45-46-47 pour V 48.

Les points de contact entre les deux groupes principaux sont minces : V 50 utilisé à la fois dans V 49 — il lui est donc postposé — et dans V 51. La portion V 44-45-46-47-48-49-50 est donc *quasi* autonome ; sa comparaison avec notre Livre XIV est instructive car V 44 (également désignée comme Lemme 8) n'est autre qu'une version du Lemme

[82] Ce qui était l'objet de l'ajout à Eucl., *Él.* XIII 18. Il avait été rappelé un peu plus haut (fin de la partie I, 358.27-28 Hultsch) que ce résultat était démontré par Euclide et par d'autres ! Il se pourrait qu'Aristée soit l'un d'eux ; le titre même de son ouvrage présuppose ce résultat. Il avait probablement été découvert par Théétète. Voir [Euclide-Vitrac, 2001], pp. 96-100.

[83] Dans la citation que nous avons donnée plus haut, les portions mises entre crochets carrés sont considérées comme des gloses interpolées par l'éditeur F. Hultsch. Ces jugements devraient être ré-examinés sur la base de la nécessaire distinction à établir entre Pappus et l'éditeur de la *Collection* car il n'est plus guère admis que Pappus ait lui-même publié la *Collection* (voir [Pappus-Jones, 1986], pp. 15-26). Il s'agit plutôt du rassemblement d'œuvres séparées dont certaines avaient eu une publication (et une transmission) indépendante, même si les spécialistes ne sont pas d'accord au sujet de l'époque à laquelle ces *Collected papers* ont été réalisés. Jones pense qu'il s'agit du travail d'un disciple, une sorte d'exécuteur testamentaire, opérant peu de temps après la mort de Pappus (vers le milieu du IV^e^ s. ?). [Decorps-Foulquier, 2000], pp. 47-51, a avancé un certain nombre d'arguments, dont certains sont plutôt convaincants, pour défendre l'idée (contre Jones) que la *Collection* n'avait pas encore été réunie en tant que telle à l'époque d'Eutocius.

SEMR et V 48 (= Lemme 12, également désignée comme théorème 12 dans V 55) établit le résultat d'Aristée $r_{20} = r_{12}$. Or le Lemme 13, qui en propose une démonstration alternative, coïncide à peu près avec la conjonction, dans une même Proposition, du Lemme XIV **1/2** et de la preuve, dans XIV **2**, de ce même résultat. Nous pourrions donc légitimement en conclure que nous nous trouvons en présence de deux citations du Livre XIV, non explicitées en tant que telles.



Bien entendu, pour chacune de ces deux portions, il y a des divergences entre les deux textes, notamment pour la seconde, la conjonction de la preuve de XIV. **2** et de son Lemme, avec toutes les conséquences qu'entraîne une telle conjonction : l'ecthèse, le diorisme et la première étape de construction qui suit l'énoncé dans V 48*aliter* n'existent évidemment pas à cette place dans le Livre XIV ; à l'inverse la formule de transition dans l'énoncé de XIV **2** faisant référence au lemme, l'énoncé dudit Lemme, avec son ecthèse et son diorisme n'existent pas dans V 48*aliter* ; la référence explicite à XIV **1/2** dans la preuve de XIV **2** donne lieu à un simple rappel interne de démonstration dans V 48*aliter*. Cela pourrait facilement s'expliquer, soit par une volonté de concision de la part de l'auteur de cette portion de la *Collection* — après tout il ne s'agit que d'une preuve alternative —, soit parce que les deux portions étaient originellement conjointes dans la monographie d'Hypsiclès et que leur séparation est le résultat du travail éditorial de celui qui a transformé ladite monographie en Livre XIV[84]. Pour le Lemme SEMR, il y a également des variantes, mais le texte édité par Heiberg (à partir de ***M***) est très probablement corrompu et V 44 montre peu d'écart avec le texte de la famille ***PBVv***[85]. Si l'on est très optimiste, on pourra même pousser la comparaison un peu plus loin :

- V 40 (également désignée comme Lemme 4) correspond mathématiquement au très élémentaire ajout à XIV 1 — c'est le rapprochement déjà opéré entre Hypsiclès et Pappus par le scholiaste du *codex Constantinopolitanus palatii ueteris* n°1 —, mais les formulations en présence ne permettent pas de dire qu'il s'agit d'une citation de l'un par l'autre.
- V 41, si elle n'a pas d'équivalent dans le Livre XIV, exploite (autrement) la même configuration géométrique que XIV **1**[86].
- Enfin V 47 n'a pas non plus d'équivalent dans le Livre XIV, mais il s'agit du Lemme que nous avons appelé XIII 9^{bis}, requis dans la preuve de XIV **2**, établi dans une scholie du manuscrit ***M*** et attesté dans l'ensemble de la tradition indirecte des livres additionnels[87].

Cela dit, l'examen détaillé des Propositions V 45-50 et la façon dont elles s'insèrent dans cette troisième partie du Livre V de la *Collectio* n'entraînent pas la conviction que nous sommes bien en présence de citations du Livre XIV (ou de la monographie d'Hypsiclès) voulues comme telles par Pappus (même s'il n'en n'indique pas l'origine) et qui inciteraient à penser qu'il connaissait cet écrit. Contentons-nous de résumer quelques arguments.

La Proposition V 49 fait l'hypothèse qu'un dodécaèdre et un icosaèdre sont inscrits dans une même sphère ; nous sommes donc exactement dans la configuration mathématique du Livre XIV. Elle se propose d'établir que la surface du premier est plus grande que celle du deuxième à l'aide des Propositions V. 48 et 50.

La première (qui n'est autre que le résultat d'Aristée) permet de se ramener à un même cercle comme sur la figure ci-dessous :

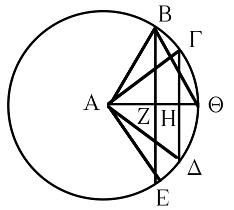
---

84 Auquel cas la dernière assertion de la cheville de transition insérée après XIV **1** (γραπτέον ... προγραφέντος τοῦδε), devrait être aussi attribuée à cet "éditeur".

85 Voir *infra,* comm. *ad loc.* (note complémentaire 5.4).

86 Cf. aussi la Prop. 15 du *Livre des Lemmes* attribué à Archimède, et *Él.* IV 10 qui, convenablement interprétée, permet d'établir très facilement XIII 9, XIII 9^{bis}, XIV 1 et *Papp.,* V 41. Voir *infra,* comm. *ad loc.* (note complémentaire 5.1) et III, § 2.

87 Voir *infra,* III, § 2.



On commence par établir que :

S_{12} = 60 triangles (ΓΑΔ), soit 30 Rect (y_5, c_5),

S_{20} = 60 triangles (ΑΒΕ), soit 30 Rect (y_3, c_3).

Substantiellement, cette étape est donc tout à fait comparable au très élémentaire Lemme XIV **2/3**.

La Proposition 49 résulte alors de l'inégalité : « Rect (y_5, c_5) > Rect (y_3, c_3) », elle-même établie dans V 50 qui joue donc un rôle mathématique similaire à celui de XIV **3**, à ceci près que cette dernière n'établit pas une simple inégalité, mais exprime le rapport Rect (y_5, c_5) : Rect (y_3, c_3) en termes de lignes, à savoir $a_6 : a_{20}$. L'inégalité à établir ici est alors une conséquence triviale de l'inégalité $a_6 > a_{20}$ (originellement) établie dans XIII 18. On l'obtient aussi très facilement à partir de la proportion « $a_6 : a_{20} :: \partial_1 : \partial_2$ », c'est-à-dire XIV **4**, comme on le voit faire dans les récapitulations du Livre XIV. Autrement dit, pour qui cherche la clarté et la concision dans l'expression et qui disposerait du Livre XIV, il serait très facile d'alléger la preuve de V 50. Or, si l'on compare maintenant les démonstrations de V. 50 et de XIV **3**, on voit qu'elles n'ont rien à voir : la première est d'inspiration "trigonométrique", assez compliquée (après coup !) et elle exploite les propriétés dispositionnelles d'un diagramme. Celle de XIV **3** est très élégante, elle repose sur la manipulation du partage en extrême et moyenne raison et sur l'habile remarque contenue dans la Proposition XIV **1**. Certes il y a également la preuve *aliter* de XIV **3** qui ne dépend pas de ladite section, fondée sur un principe différent (on applique l'aire du pentagone à la hauteur du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle), mais elle n'a pas non plus grand chose à voir avec celle de V 50 qui a donc été conçue dans un tout autre contexte mathématique.

Ce qui vient d'être dit pour V 49-50 pourrait être répété pour V 48, entendons pour la première preuve, celle qu'il y a tout lieu de croire originale. Bien entendu, il y a des points de contact avec XIV **2**, par exemple le recours aux mêmes résultats du Livre XIII (Propositions 10, 12, 15c ; Porismes à XIII 16, 17), ainsi qu'au Lemme SEMR (~ V 44) et à XIII 9^{bis} (~ V 47), absents des *Éléments* et, probablement, de la rédaction originelle d'Hypsiclès. Mais la spécificité de la preuve réside dans l'utilisation des deux Lemmes 9-10 (V 45-46) qui reprennent la configuration mathématique de XIII 18 — mais sans véritablement en exploiter les résultats —, et dont la formulation et la démarche sont passablement différentes de celles de XIV **1/2**. C'est d'ailleurs ce qui justifie d'insérer V 48*aliter* comme démonstration alternative, car il était assez difficile d'y percevoir un doublon ou une simple variante de la première preuve[88].

Dans cette insertion de V 48*aliter* il faut probablement voir une opération éditoriale plutôt que mathématique : non seulement son texte est saturé de formules de renvois, mais en supposant qu'elle ait été reprise au Livre XIV ou à la monographie d'Hypsiclès,

[88] Voir *infra,* comm. *ad loc.* (note complémentaire 5.2).

celui qui en a été responsable n'a pas vu que le même ouvrage permettait de simplifier les preuves de plusieurs autres Propositions, en particulier celle de V 49. En imputer la responsabilité à Pappus lui-même réduirait son rôle à celui d'un simple compilateur. *A contrario,* s'il s'agit de l'éditeur de la *Collection* il n'a rien d'étonnant à ce qu'un "exécuteur testamentaire", pour reprendre la formule de Jones, restreigne ainsi la portée de ses interventions. Cela fait même partie de ses obligations.

L'emprunt s'est probablement exercé aussi dans l'autre sens : le Lemme SEMR, dont nous avons dit qu'il avait été inséré ultérieurement, à la suite de la Proposition XIV **5**, dans la monographie d'Hypsiclès transformée en Livre XIV, a sans doute été repris à Pappus (V 44) ou à une source commune, tant la proximité textuelle est grande, surtout si l'on suit la leçon des manuscrits ***PBVv*** (voir comm. *ad loc.*).

9. Inventaire de la tradition indirecte médiévale des livres additionnels

Les Livres XIV-XV[89] existent dans la plupart des manuscrits de la version arabe dite Isḥāq-Thābit, en fait dans *tous* ceux qui ne sont pas mutilés avant la fin[90]. Dans plusieurs d'entre eux, y compris le vénérable Téhéran Malik 3586, le Livre XIV *et* même le Livre XV sont attribués à Hypsiclès (Ibsiqlāwus, Insiqlāwus, Isqilāwus) et le seul traducteur mentionné — quand tel est le cas —, est Qusṭā Ibn Lūqā, tantôt pour XIV, tantôt pour XV, tantôt pour les deux[91]. Ils existent aussi dans les importantes recensions d'Ibn Sīnā (980-1037) et de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201-1274), mais manquent cependant dans la version dite Pseudo-Ṭūsī, pourtant ponctuellement très détaillée.

Il n'existe pas d'édition critique complète de la version dite Isḥāq-Thābit, en particulier pour les Livres stéréométriques et il est donc impossible d'en faire un usage

---

89 Mais le Livre XV de l'ensemble de la tradition indirecte arabe et arabo-latine ne possède que la première partie du texte grec, *EHM,* V, 40.1— 48.15 Heiberg (= *EHS,* V, 1, 23.1—28.15), c'est-à-dire les cinq problèmes relatifs à l'inscription mutuelle de deux polyèdres réguliers, précédées de ce que nous avons appelé le Lemme XIII 9^bis^, qui appartenait initialement à la fin du Livre XIV. Voir *infra,* III, § 2.

90 Téhéran Malik 3586 ; Uppsala, Universitetsbibliotek 321 ; Saint Pétersbourg, C. 2145 ; Istambul, Fatih 3439 ; Oxford, Bodleian Library, Huntington 435 ; Oxford, Bodleian Library, Thurston 11 ; Cambridge, University Library, Browne Addit. 1075 ; København, Kongelige Biblioteket, Mehren 81 ; El Escorial ar. 907 ; Dublin, Chester Beatty Library 3035 ; Rabat, Hassaniyya (al-Malik) 1101 ; Téhéran, Maglis Shura 200 ; Rampur, Raza Library, Arshi 200 ; Kastamonu 607. On peut leur adjoindre le ms BnF Hébr. 1381 (ms arabe en caractères hébraïques) qui inclut lui aussi les livres additionnels. Nous devons cette information à Tony Lévy et l'en remercions. On connaît en outre trois manuscrits contenant une portion de la version Isḥāq-Thābit : Rabat, Hassaniyya (al-Malik), 53.11 (L. I-V) ; Dunedin Otago Museum De Beer 8 (L. I-III) ; Teheran Danishgah 2120 (L. VII en partie, en fait la portion manquante du Téhéran 3586). Sur ces manuscrits et les familles qu'ils constituent, voir par exemple [De Young, 2004], pp. 313-323. Dans ce qui suit, nous abrégeons les désignations des manuscrits arabes comme nous venons de le faire (Téhéran Malik 3586 → Téhéran 3586) d'une manière qui n'introduit aucune ambiguïté.

91 Car tout dépend du nombre et de la place des *incipits* et colophons. Pour XIV : Téhéran 3586, f° 233^v ; Thurston 11, ff° 202^r, 208^r ; Escorial 907, f° 175^v. Pour XV : Istambul 3439, f° 65^v ; Cambridge 1075, f° 233^v. Pour XIV-XV : Uppsala 321, ff° 1^r, 193^r, 198^v ; Saint Pétersbourg 2145, f° 265^r ; København 81, ff° 202^r, 210^v, 211^r. Dans les mss Rabat 1101 et Téhéran 200, Hypsiclès est aussi désigné comme l'auteur, mais aucun traducteur n'est précisé.

extensif. Ahmed Djebbar, après un certain nombre de sondages dans plusieurs manuscrits de ladite version (Téhéran 3586, Uppsala 321, Pétersbourg 2145, Thurston 11, København 81, Rabat 1101, Escorial 907, Téhéran 200) ainsi que dans les recensions d'Ibn Sīnā et d'aṭ-Ṭūsī, a réalisé des éditions de deux versions divergentes du Livre XIV, avec traductions françaises. La première, repérée dans la famille Téhéran 3586, Uppsala 321, Pétersbourg 2145, Thurston 11, København 81, Téhéran 200, a été établie à partir de trois d'entre eux, notamment les deux plus anciens témoins conservés de cette version, les manuscrits Téhéran 3586 et Uppsala 321, avec l'aide du Téhéran Majlis 200. La seconde version, en l'état actuel de nos connaissances, est contenue dans le seul Rabat 1101. Cette copie (datée de 1284) appartient (avec Rabat 53, Escorial 907 et le BnF Hébr. 1381) à un sous-groupe de manuscrits que certains spécialistes ont baptisé « andalous »[92], lesquels, dans les Livres I-XIII, partagent aussi un certain nombre de traits spécifiques avec la traduction arabo-latine de Gérard de Crémone (dernier tiers du XII^e^ s.). Ils contiennent en particulier des portions rapportées à l'une des traductions d'al-Ḥajjāj. Toutefois, en ce qui concerne le Livre XIV, Rabat 1101 présente une version des Livres additionnels étonnamment proche du texte grec de la famille ***PBVv*** qu'on ne trouve dans son intégralité[93] ni dans l'Escorial 907, ni dans le BnF Hébr. 1381.

Les Livres XIV-XV existent également dans toutes les versions arabo-latines publiées par H.L.L. Busard[94], sauf celle d'Hermann de Carinthie dont seuls les 12 premiers Livres sont conservés :

- celles dites d'Adélard I[95], d'Adélard II, due, selon ses récents éditeurs, à Robert de Chester[96], d'Adélard III, rapportée par Busard à Johannes de Tinemue[97];
- celle attribuée à Gérard de Crémone[98];
- l'adaptation anonyme (XIII^e^ s.) de la version de Robert de Chester contenue, notamment, dans le manuscrit Bonn, Universitätbibliothek S 73[99];
- La célébrissime recension de Campanus de Novare, composée vers 1250-1260[100].

Dans l'un des deux manuscrits (*BNF lat.* 7373, 1^e^ moitié du XIII^e^ s.) de la version dite gréco-latine des *Éléments*, laquelle, dans les Livres authentiques est une version extrêmement littérale faite sur un ou plusieurs modèles grecs[101], réalisée probablement

[92] Voir [De Young, 2004], pp. 315-316.
[93] Cela dit, la prise en compte de certaines portions du ms arabe Escorial 907 et des scholies VI-VII arabo-latines de Gérard de Crémone (voir *infra,* III, § 1, 3) montre cependant qu'elle n'est pas restée complètement isolée.
[94] Ils existent également dans les versions hébraïques produites (à partir de l'arabe) au XIII^e^ s. par Moïse Ibn Tibbon et Jacob ben Makhir. Voir [Lévy, 1997].
[95] [Busard, 1983], pp. 374-387. Nous emploierons désormais l'abréviation *Ad. I.*
[96] [Busard-Folkerts, 1992], pp. 329-339. Nous emploierons désormais l'abréviation *RC.*
[97] [Busard, 2001], pp. 388-402. Nous emploierons désormais l'abréviation *JT.*
[98] [Busard, 1984], pp. 413-430 ; les Livres XIV-XV y sont attribués à Assicolaus. Nous emploierons désormais l'abréviation *GC.*
[99] [Busard, 1996], pp. 381-391.
[100] [Busard, 2005], pp. 492-520. Nous emploierons désormais l'abréviation *Camp.*
[101] John Murdoch, qui a découvert cette version, a suggéré que le traducteur avait utilisé, entre autres, le manuscrit ***B*** ; voir [Murdoch, 1966], pp. 260-262.

vers 1180, on trouve, intercalée (f°167^{v}-172^{v}) entre les traductions (gréco-latines) des Livres I à XIII et XV (f°173^{r}-175^{v}), une version plutôt compacte des Livres XIV et XV[102], de fait arabo-latine[103] que nous appellerons, comme Murdoch et Busard, *compendium*.

À cet ensemble déjà très riche, on peut ajouter deux scholies contenues dans cinq des sept manuscrits[104] de la version arabo-latine de Gérard de Crémone utilisés par Busard pour son édition qu'il numérote VI et VII[105]. La scholie VI contient la Proposition XIV **4** ; la scholie VII porte la fin du Livre (Lemme SEMR et doubles récapitulations finales). Elles transmettent une version arabo-latine différente de celle du texte principal, mais extrêmement proche de celle du manuscrit Rabat 1101, donc du grec. Elles relèvent donc de ce que les spécialistes de la tradition médiévale appellent la transmission indirecte *primaire* pour la distinguer des élaborations *secondaires* (recensions, épitomés)[106].

10. L'origine des livres additionnels selon la tradition arabe

Non seulement les savants arabes ont eu accès aux livres additionnels, mais ils ont aussi élaboré ou transmis une histoire assez originale sur la constitution du traité en 15 livres. Elle est rapportée, avec d'importantes variations, par plusieurs sources, notamment le *Fihrist* (catalogue) d'Ibn an-Nadīm (2^{e} moitié du X^{e} s.), le *Livre qui informe les savants sur la vie des sages* (*Ikhbār al-'ulamā' bi akhbār al-Ḥukamā'*) d'Ibn al-Qifṭī (XII^{e} s.) et la recension dite du Pseudo-Ṭūsī (XIII^{e} s.).

Le plus prolixe est le second, dont la notice « Euclide » couvre plusieurs pages contenant : un éloge d'Euclide ; (***A***) une première version de l'histoire de la constitution des *Éléments* ; une abondante liste de traducteurs et de commentateurs du traité, interrompue par une seconde version de l'histoire de la constitution des *Éléments* (***B***) ; la liste des autres écrits attribués à Euclide[107]. Le second récit historique (***B***) reproduit une partie de la notice « Euclide » du *Fihrist.* Il est rapporté à l'autorité du philosophe al-Kindī (mort vers 870) et à son épître sur *les buts du livre d'Euclide* (*Aghrāḍ kitāb Uqlīdis*), aussi bien par Ibn an-Nadīm que par Ibn al-Qifṭī :

(***B***) « Al-Kindī a indiqué, dans son *Épître sur les buts du Livre d'Euclide*, que

(***Bi***) cet ouvrage avait été composé par un homme nommé Aplinès le charpentier et

---

[102] Voir l'édition [Busard, 1987], respectivement pp. 399-407 et 408-411. Désormais nous emploierons l'abréviation *Gr.lat.*

[103] Voir *infra,* III, § 4.

[104] Bruges, Stadsbibliotheek 521 (*B*) ; Vatic. lat. 7299 (*L*) ; Boulogne-sur-mer, Bonien. 196 (*M*) ; Paris. BnF lat. 7216 (*P*) ; Vatic. Rossiano 579 (*R*). Pour la description des manuscrits et le conspectus siglorum de Busard, voir *GC,* pp. XXII-XXIII.

[105] Respectivement *GC,* 440.5-441.23 et 441.25-443.2.

[106] Voir [Brentjes, 2001], pp. 39-41 et [De Young, 2004], pp. 313-319.

[107] Voir [Ibn al- Qifṭī-Lippert, 1903], pp. 62-66. Traduction allemande dans [Kapp, 1934-1936/1997], pp. 19-26.

(***Bii***) qu'il l'avait composé en quinze Livres.

(***Biii***) Puis, lorsque l'époque de ce livre s'est éloignée et qu'il a été délaissé, un des rois alexandrins, de la même époque qu'Euclide, entreprit d'étudier la géométrie.

(***Biv***) Il lui a alors ordonné de réviser ce livre et de l'expliquer.

(***Bv***) C'est ce qu'il a fait et il a expliqué treize Livres. Alors on les lui a attribués.

(***Bvi***) Puis, après cela, Hypsiclès, l'élève d'Euclide, a trouvé deux livres, le quatorzième et le quinzième.

(***Bvii***) Il les a dédiés au roi et ils ont été ajoutés à l'ouvrage. Tout cela <s'étant déroulé> à Alexandrie »[108].

Le premier récit, quoique plus circonstancié et incompatible avec le second par certains détails, est aussi attribué à une épître (sans précision de titre) d'al-Kindī par Ibn al-Qifṭī :

(***A***) « Ya'qūb Ibn Isḥāq al-Kindī, qui était très informé, a dit, dans une de ses épîtres,

(***Ai***) qu'un roi grec avait trouvé dans les bibliothèques deux livres attribués à Apollonius le charpentier

(***Aii***) dans lesquels il a évoqué la réalisation des cinq solides qui sont les seuls qu'une sphère peut circonscrire.

(***Aiii***) Il a alors cherché qui expliciterait <le contenu> des deux livres.

(***Aiv***) Il ne trouva pas sur la terre de la Grèce quelqu'un connaissant cela.

(***Av***) Il interrogea ceux qui venaient <d'autres> régions.

(***Avi***) L'un de ceux qui avaient été interrogés l'a informé qu'il avait vu, à Tyr, un homme dénommé Euclide dont le métier était la menuiserie, qui parlait de cet art et qui le pratiquait.

(***Avii***) Alors le roi écrivit à <celui qui était> alors roi de la côte et lui envoya une copie des deux livres évoqués précédemment et il lui demanda de solliciter Euclide pour les expliciter.

(***Aviii***) Le roi de la côte fit cela et se présenta devant Euclide.

(***Aix***) Et Euclide était le plus savant en géométrie parmi les gens de son époque.

(***Ax***) Il lui explicita le <contenu> des deux livres et lui expliqua le but d'Apollonius à travers eux.

(***Axi***) Puis, il lui rédigea une introduction pour aboutir à la connaissance de ces cinq solides. Il en résultat les treize livres attribués à Euclide.

(***Axii***) Après Euclide, quelqu'un l'a prolongé de deux Livres dans lesquels il a évoqué ce que n'avait pas évoqué Apollonius sur les rapports de certains de ces cinq solides les uns aux autres et l'inscription des uns dans les autres.

(***Axiii***) Certains attribuent ces deux Livres à un autre qu'Euclide et <considèrent> qu'ils ont été ajoutés au livre <d'Euclide>.

(***Axiv***) Un connaisseur de l'histoire a indiqué qu'il était plus ancien qu'Archimède et les autres et qu'il faisait partie des philosophes mathématiciens ».

L'auteur de la recension dite du Pseudo-Ṭūsī, dans une préface tout à fait intéressante, aborde lui aussi (entre autres choses) la question de la généalogie des *Éléments*. Il ne cite

[108] Traduction de travail par Ahmed Djebbar. Nous introduisons une division en séquences pour faciliter la comparaison des versions et la discussion qui suit.

aucune autorité, mais sa présentation combine des éléments que l'on pourrait croire repris à l'un et l'autre des deux récits placés sous l'autorité d'al-Kindī :

> « Et le livre des *Éléments,* qu'on appelle l'usṭuqusāt … pour l'analyse de l'ensemble des sciences mathématiques <auxquels on se réfère> dans le passé est classé en quinze Livres (cf. ***Bii***). Un roi grec a cherché à le comprendre ; il lui a été difficile (cf. ***Biii***). Il s'est mis à chercher les informations sur le livre chez tout homme de science. L'un d'eux lui a indiqué un homme dans la ville de Tyr nommé Euclide et qui était éminent dans les deux sciences de la géométrie et du calcul (cf. ***Av-vi***). Le roi l'a fait quérir et lui a ordonné de mettre de l'ordre dans le livre (cf. ***Biv***). Il l'a alors ordonné et classé en 13 Livres et le livre devint célèbre avec son nom (cf. ***Bv***). Et il a supprimé les deux derniers Livres parce que leurs problèmes sont des prémisses sur lesquels reposent les démonstrations des rapports des solides évoqués dans le XIII^e^ Livre, et la manière de construire les figures qui y sont indiquées, les unes dans les autres (cf. ***Axii*** !). Et toutes s'explicitent à partir d'elles et à partir d'autres parmi les livres qui les précèdent. Et le livre était conçu pour contenir les fondements, sans leurs ramifications parce qu'elle sont infinies. C'est pourquoi un certain nombre de questions ne s'explicite qu'avec cette science des fondements posés dans la mesure où le phénomène de la démonstration fait partie des problèmes du livre. Puis, après un certain temps, apparut à Ascalon un homme nommé Hypsiclès qui émergea dans les sciences mathématiques et qui a ajouté les deux livres à l'ouvrage après les avoir révisés (cf. ***Bvi*** !). L'ouvrage eut alors quinze Livres. Puis il a été traduit en arabe, ordonné en quinze Livres ».

On aimerait lire ce qu'avait vraiment écrit al-Kindī ; peut-être proposait-il différentes combinaisons et interprétations possibles des (maigres) données de la tradition afin d'en souligner les incertitudes, d'où des incompatibilités ponctuelles malgré un objectif unique : proposer une généalogie des *Éléments* dans lesquels il faut distinguer deux sous ensembles, d'une part les Livres I à XIII, qui à tort (***Bv***) ou à raison (***Axi***), sont attribués à Euclide, d'autre part les Livres XIV-XV, pour lesquels il y a davantage d'incertitudes encore.

Dans le récit (***B***), ils existaient dès le départ, dans une version initiale des *Éléments* en 15 livres due à Apollonius (son nom est ici corrompu : Aplinès le charpentier), et ils sont retrouvés par Hypsiclès et adjoints, après révision, à la recension euclidienne des 13 premiers Livres (***vi-vii***). Euclide et Hypsiclès, le second présenté comme un élève du premier, sont des éditeurs d'un écrit plus ancien, tombé dans l'oubli. Dans la version (***A***), les livres additionnels sont conçus par un auteur non précisé, après la composition de l'introduction d'Euclide à la théorie des solides réguliers (= Livres I à XIII !), mais en se démarquant de ce qu'avait fait Apollonius dans la version initiale d'un traité en 2 livres (***xii***), seulement consacré aux polyèdres [et non pas une proto-version des *Éléments* en 15 livres comme dans (***B***)]. Manifestement il y avait quelque incertitude quant à l'auteur (***Axiii***) et certains semblaient croire qu'il s'agisse aussi d'Euclide.

En ce qui concerne la généalogie des *Éléments,* Pseudo-Ṭūsī suit plutôt (***B***), mais en ajoutant des détails circonstanciés que nous trouvons dans (***A***), justifiant la mise à l'écart des Livres XIV-XV à l'étape euclidienne, à cause de leur caractère fondationnel insuffisant pour faire partie des *Éléments*. Deux détails intéressants : Hypsiclès est dit d'Ascalon[109] [toute l'histoire se déroulait à Alexandrie dans (***B***)]. La (re)composition des *Éléments* en 15 Livres s'est faite en grec, avant la transmission aux Arabes.

Ces récits, les détails biographiques concernant Euclide qui les accompagnent, ont été traités avec beaucoup de condescendance par les spécialistes des sciences grecques. L'idée qu'Apollonius ait été antérieur à Euclide a fait sourire. Dans la mesure où nous ne connaissons pas le contexte textuel dans lequel al-Kindī essayait de reconstituer la généalogie des *Éléments,* mieux vaut rester mesuré. Observons que la préface d'Hypsiclès n'est pas "signée", autrement dit qu'on n'y trouve pas d'adresse telle que « Hypsiclès à Protarque, salut ! » (Ὑψικλῆς Πρωράρχῳ χαίρειν) dont le genre nous est connu grâce aux préfaces d'Archimède et d'Apollonius. L'auteur du texte, tel qu'il est transmis[110], n'est donc pas immédiatement identifiable, mais il est clair qu'il se positionne comme postérieur à Apollonius lui-même présenté comme ayant écrit sur le thème des (de certains) solides réguliers. Les manuscrits grecs qu'ont utilisés les traducteurs arabes et qu'ont pu consultés les érudits des premiers cercles de savants du IX^e^ siècle (comme celui d'al-Kindī[111]) comportaient probablement des *incipits* comme ceux que nous connaissons par la tradition directe[112], mentionnant Hypsiclès et sans doute Euclide, incitant peut-être (description au pluriel : τὰ εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενα) à penser que XIV-XV constituaient une seule entité, autorisant par conséquent à parler non plus de deux solides réguliers seulement, mais des fameuses *cinq* figures. En attribuant la préface, non plus à Hypsiclès, mais à Euclide, on aboutissait à cette chronologie inversée. D'autres mécompréhensions peuvent expliquer certains détails : qu'Euclide est de Tyr (et non Basilide[113]), qu'il y a un roi dans l'affaire (confusion entre Βασιλείδης et Βασιλεύς, roi) …

Il semble donc que l'on ait là une reconstruction (ou plusieurs), élaborée à partir d'informations contenues dans les préfaces d'Hypsiclès et d'Apollonius, mal comprises ou très corrompues, peut-être aussi d'indications tirées de scholies. Ainsi, l'assertion (***Axiv***), manifestement d'une autre origine, fait penser à une affirmation de la "biographie" d'Euclide (très incertaine elle aussi) que tente Proclus[114] en l'encadrant

---

109 Il est probable qu'Hypsiclès, présenté dans nos anecdotes comme l'un des éditeurs d'Apollonius, ait été confondu avec Eutocius d'Ascalon, connu comme (ré) éditeur des Livres I-IV des *Coniques* du même Apollonius.

110 Une telle adresse existait peut-être dans la monographie d'Hypsiclès et qui aurait été supprimée par celui qui l'a éditée comme Livre XIV. La formule serait alors à l'origine d'une partie des titres que portent les manuscrits grecs en tête dudit Livre (« Ὑψικλέους ... ») (Cf. *supra,* § 1).

111 Sur le cercle d'al-Kindī, voir [Endress, 1997].

112 Voir *supra,* § 1.

113 On a pu aussi rapprocher ou confondre la visite de Basilide à Alexandrie avec celle de Naucrate chez Apollonius (à Alexandrie) que ce dernier évoque dans la préface au Livre I des *Coniques.* Cela justifierait qu'Euclide, qui est dit « fils de Naucrate » par les sources arabes, soit originaire de Tyr, si on a identifié sauvagement le visiteur d'Apollonius avec Basilide de Tyr, celui-ci avec le père de l'auteur de la préface, l'auteur de la préface avec Euclide !!

114 *Pr.* 68.6-18. Il ne semble pas que le commentaire au premier Livre ait été traduit en arabe, mais ce genre d'affirmations a pu être trouvé dans des scholies. Voir par exemple l'assertion suivante :

entre les mathématiciens philosophes de l'Académie et Archimède. À notre connaissance, il n'existe pas de sources antiques transmettant la même "histoire" d'une rédaction initiale des *Éléments* en 15 Livres.

11. Un ou plusieurs traducteurs ?

Que Qusṭā Ibn Lūqā ait traduit les Livres additionnels, personne, à notre connaissance, ne le remet en question[115]. Mais fût-il le seul ? Peut-on affirmer, comme le fait Sezgin, à partir du témoignage de l'historien Aḥmad Ibn Wādih al-Ya'qūbī, que ces deux Livres n'existaient pas dans la version d'al-Ḥajjāj[116] ? Al-Ya'qūbī décrit en effet sommairement le contenu de *13* Livres d'éléments et indique à chaque fois le nombre total de théorèmes. Certains de ces nombres — 47 dans le Livre I ; 35 dans le Livre III ; 32 dans le Livre VI ; 104 dans le Livre X — suggèrent en effet que l'on a affaire à une version structurellement de type al-Ḥajjāj, même si celui-ci n'est pas cité. Le fait que la recension dite Pseudo-Ṭūsī — laquelle affirme connaître la version d'al-Ḥajjāj — ne possède que les Livres I-XIII serait, selon Sezgin, un indice allant dans le même sens.

De fait, il va plus loin encore et interprète certains passages de ladite recension — évoquant ce qui se trouvait ou ne se trouvait pas en syriaque — pour soutenir la thèse que la traduction d'al-Ḥajjāj avait été réalisée à partir d'une version syriaque très ancienne. Cette (hypothétique) traduction syriaque, selon la date qu'on lui assigne, pourrait alors être antérieure à l'adjonction grecque des Livres XIV-XV, à la fin de l'Antiquité tardive.
Le raisonnement de Sezgin est séduisant, spéculatif, mais pas tout à fait décisif. Le témoignage d'al-Ya'qūbī incite à penser qu'une des deux versions produites par al-Ḥajjāj contenait seulement les livres euclidiens authentiques, ce qui n'exclut pas complètement, nous semble-t-il, la possibilité qu'al-Ḥajjāj ait traduit les Livres XIV-XV. On sait que sa seconde version (révision ?) est présentée comme abrégée par la préface du codex de Leiden. Il pourrait en avoir écarté les Livres additionnels même s'ils figuraient dans la première : ils étaient inauthentiques ; leur portée fondationnelle paraissait plutôt limitée. Comme nous l'avons vu plus haut, c'est ce que suggère l'auteur de la préface de la recension du Pseudo-Ṭūsī à propos des intentions d'Euclide. Au demeurant, bien qu'il connaisse l'histoire d'une constitution des *Éléments* en *15* Livres, sa propre recension ne contient que les Livres I à XIII.

« ὁ δὲ Εὐκλείδης γέγονεν μὲν κατὰ τὸν πρῶτον Πτολεμαῖον, τὰ δὲ σποράδην ὑπὸ τῶν παλαιοτέρων θεωρηθέντα συνήγαγεν αὐτὸς εἰς στοιχείωσιν, τάξιν αὐτοῖς καὶ ἀποδείξεις ἀκριβεστέρας ἐπιθεὶς ὡς πρὸς στοιχείωσιν »

(Euclide vécut sous le premier Ptolémée et lui-même recueillit en collection ordonnée d'éléments les choses qui avaient été établies ça et là par les auteurs plus anciens, leur procurant un ordre et des démonstrations plus précises, en vue d'en faire une collection ordonnée d'éléments),

in scholie I n°1 (dans le ms ***P***), *EHS* V, 1, 40.23-27] à comparer avec *Pr.* 68.7-11.

[115] [Herz-Fischler, 1988], p. 53, n. 88 et p. 61 avait contesté qu'il y ait une bonne raison d'attribuer à Qusṭā Ibn Lūqā la traduction du L. XV dans la mesure où ni l'incipit, ni l'explicit dudit Livre, dans le ms Thurston 11 — le seul qu'il ait consulté sur ce point —, ne mentionne de traducteur. Mais voir *supra,* note 91.

[116] [Sezgin, 1974], p. 144.

Le témoignage de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī comparant les nombres de Propositions dans les versions d'al-Ḥajjāj et d'(Isḥāq-)Thābit pourrait être sollicité en ce sens :

> « L'ouvrage comprend quinze Livres avec les deux ajoutés à la fin, et c'est 468 propositions dans la copie d'al-Ḥajjāj avec un ajout de dix propositions dans la copie de Thābit et, dans certains endroits, il y a aussi entre elles des différences dans l'ordre. Et j'ai numéroté le nombre des propositions des Livres en rouge pour Thābit et en noir pour d'al-Ḥajjāj lorsqu'il divergeait de lui »[117].

Ces indications numériques impliquent que lesdites versions contenaient les Livres XIV et XV avec respectivement 10 et 6 Propositions. Cela dit, compte tenu de la chronologie, on peut bien imaginer que les mathématiciens et bibliographes du XIIIe siècle appelaient « version d'al-Ḥajjāj » un ensemble composite, constitué de la traduction des 13 Livres euclidiens par ce dernier, complétée par celle des Livres XIV et XV due à Qusṭā Ibn Lūqā, éventuellement révisée par Thābit. Ainsi les deux manuscrits arabes utilisés par Klamroth (Thurston 11 et København 81) assignent la traduction du Livre XIV à Qusṭā Ibn Lūqā, bien que le premier identifie la traduction des Livres I à XIII comme étant celle d'Isḥāq révisée par Thābit, alors que le second affirme que celle des Livres XI-XIII est due à al-Ḥajjāj ! Surtout il n'y a aucune indication que la traduction arabe des *Éléments* ait été précédée par une étape syriaque. Selon Sonia Brentjes (communication personnelle), toutes les versions arabes qu'elles a eues l'occasion d'examiner, qu'elles s'inscrivent dans la tradition ḥajjājienne ou dans celle dite Isḥāq-Thābit, procédaient du grec à l'arabe, sans transition par le syriaque.

Enfin, même s'il est possible d'en rendre compte autrement que par la pluralité des traducteurs — nous y reviendrons —, reste que l'on constate de nombreuses variantes entre les différentes composantes de la tradition indirecte.

---

[117] Ms Aya Sofya, Ahmet III 3452, f°1b, traduction française par A. Djebbar. Cf. aussi [Klamroth, 1881], pp. 272-274.

II TROIS VERSIONS DU LIVRE XIV

A Tradition grecque

1. Description des manuscrits utilisés[1]

P cod. Vatican. Gr. 190, IXe s., manuscrit de parchemin, in 4°, 340 f°.

Probablement copié par plusieurs mains d'un même atelier, sur deux colonnes, en deux parties (I = f° 1-174, II = f° 175-340), désormais réunies. Contient :

- la scholie I 1 aux *Éléments* d'Euclide (f° 3-13, mutilée au début, composée pour l'essentiel d'extraits du commentaire de Proclus aux définitions du Livre I)
- les *Éléments* I-XIII (f° 14-247), accompagnés de nombreuses scholies
- l'Introduction de Marinus aux *Data* (f° 248-250)
- les *Data* (f° 250-281) ; puis
- des scholies sur les *Data* (f° 282)
- le Livre XIV (f° 283r-288r, avec le titre : « ΥΨΙΚΛΕΟΥΣ ΤΟ ΕΙΣ ΕΥΚΛΕΙΔΗΝ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟΝ » et à la fin : « ΥΨΙΚΛΕΟΥΣ ΤΟ ΕΙΣ ΕΥΚΛΕΙΔΗΝ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟΝ ΙΔ »)
- le Livre XV (f° 288v-292v, avec le titre : « ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΙΔ »)
- les Livres I-III, plus une portion du Livre IV, du grand commentaire de Théon d'Alexandrie en 5 livres sur les *Tables faciles* de Ptolémée (f° 293-340).

Chaque Proposition du Livre XIV est accompagnée d'un diagramme, inséré à la fin de ladite Proposition sur la largeur de la colonne et, comme elle, numéroté.

Six scholies (nous en donnons le texte *infra,* § 4) portent sur la Proposition XIV **1**, deux par la première main, dans la marge extérieure du f° 283r et quatre par une main plus tardive : une dans la marge extérieure du f° 283r, une intralinéaire, une dans la marge inférieure du f° 283r, une dans la marge extérieure du f° 283v, reproduisant, en la déformant, une portion du diagramme de XIV **1**. La suite du Livre XIV et le Livre XV ne comporte aucune annotation.

B cod. Oxon. Bodleian. D'Orville 301, 888, manuscrit de parchemin, in 4°, 397 f°.

Copié par le clerc Stéphanos pour Aréthas qui a abondamment annoté le codex. Le début du manuscrit a été endommagé et restauré d'une manière peu soignée.

---

[1] Pour davantage de détails sur les manuscrits, voir *EHM,* pp. V-VIII et pp. XXIV-XXXIII ; *EHS,* V, 1, pp. VII-IX et pp. XVII-XXIV. Dans son édition de 1888, Heiberg avait utilisé la collation de ***M*** par G. Friedlein. Il a ultérieurement refait cette collation ; voir J.L. Heiberg, Paralipomena zu Euklid, *Hermes* 38 (1903), pp. 321-322. Pour ***P***, voir aussi [*Codices* ..., 1923], pp. 219-220 et [Théon-Mogenet-Tihon, 1985], pp. 23-26. À noter qu'à l'époque de Heiberg, ***P*** était rapporté au Xe s., alors qu'il est maintenant daté du IXe, très certainement de la première moitié du IXe siècle. Si c'est bien le cas, c'est donc la plus ancienne copie complète conservée des *Éléments*.

Contient :
- les *Éléments* I-XIII (f° 6-370^{v})
- le Livre XIV (f° 371^{r}-380^{r}, avec le titre : « «᾿Υψικλέους τὸ εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενον »)
- le Livre XV (f° 380^{r}-387^{r}, avec le titre : « Εὐκλείδου ιε »).

Chaque Proposition du Livre XIV est accompagnée d'un diagramme soigné (quoique parfois très erroné), inséré à la fin de ladite Proposition et placé dans une indentation prévue à cet effet, sauf ceux pour XIV **2** et **2/3**, de grande taille, qui occupent toute la largeur de la page.

On trouve 8 courtes références livresques marginales en « διὰ τὸ … τοῦ … » (à cause du [m^{e} théorème] du [Livre N] ou à cause du porisme au …), trois dans la marge extérieure du f°371^{v} pour XIV **1**, cinq dans la marge extérieure du f°373^{r} pour XIV **2**.

V cod. Vindobon. Philos. Gr. 103, probablement du XII^{e} s., manuscrit de parchemin puis de papier, in f°, 292 f°. Copié par plusieurs mains. Contient :
- les *Éléments* I-XIII (f° 1-245^{v})
- le Livre XIV (f° 246^{r}-250^{v}, avec le titre « Εὐκλείδου ιδ. ᾿Υψικλέους τὰ εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενα »)
- le Livre XV (f° 250^{v}-254^{r}, avec le titre : « Εὐκλείδου ιε »)
- l'*Optique* (f° 254^{v}-271^{v})
- les *Phénomènes* (f° 272^{r}-282^{v})
- des scholies sur les *Éléments* (f° 283^{r}-292^{v}), mutilées à la fin.

Chaque Proposition du Livre XIV est accompagnée d'un diagramme, inséré à la fin de ladite Proposition et placé dans une indentation prévue à cet effet. À noter que celles des deux parties du Lemme XIV **2/3** sont séparées, contrairement à ce que l'on observe dans ***PBM***.

Très nombreuses scholies dans les marges du Livre XIV, par différentes mains[2].

v cod. Vatican. Gr. 1038, XIII^{e} s., manuscrit de parchemin, in f°, 384 f°.
Copié par une seule main élégante et exercée. Contient :
- les *Éléments* II 8-XIII (f° 1-97^{v})
- le Livre XIV (f° 98^{r}-101^{r}, avec le titre : «᾿Υψικλέους τὸ εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενον »)
- le Livre XV (f° 101^{r}-103^{r}, avec le titre : « Εὐκλείδου ιε »)
- l'*Optique* (f° 103^{v}-111^{r})
- les *Phénomènes,* 1-3 d'Euclide (f° 111-112)
- l'Introduction de Marinus aux *Data* (f° 113-114) puis
- les *Data* (f° 114^{v}-129)

[2] Voir *infra,* § 4.

• le *De Mensuris* attribué à Héron (f° 130-132)
• l'*Almageste* (f° 137-323^r) puis
• des écrits mineurs (f° 323^v-384) de Ptolémée.

Le manuscrit comporte des diagrammes dans certaines portions, par exemple pour les Livres II 8-XI des *Éléments,* pour une partie des *Data* (f° 120-129) et dans quelques rares folios de l'*Almageste* (f° 161-164), le plus souvent dans des indentations prévues à cet effet, parfois en marge. Mais pour la plus grande partie du manuscrit, notamment dans les Livres XII à XV, les indentations sont restées vides.
Aucune annotation marginale dans les Livres XIV-XV.

M cod. Monac. Gr. 427, manuscrit de papier, 244 f°. Contient :
• le commentaire de Proclus au premier Livre des *Éléments* (f° 1-233) par une main du XI^e s.
• Une seconde main, XIII^e s., a copié le Livre XIV (f° 234^r-240, avec le titre : « τὸ εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενον ῑδ ᾿Υψικλέους »), puis
• une partie de l'Introduction de Marinus aux *Data* (f° 241-244).

Le manuscrit comporte des diagrammes pour une partie du Livre XIV dans des indentations prévues à cet effet à la fin des Propositions (XIV **1**, f° 234^v, XIV **1/2**, f° 235^r, XIV **2/3**, f° 236^v). Le diagramme de XIV **2**, de grande taille, a été placé dans la marge inférieure (f° 235^v). Même chose pour une figure supplémentaire, quand la Proposition occupe à la fois un recto et un verso, à la marge inférieure du recto (XIV **1**, f° 234^r ; XIV **2/3**, f° 236^r ; XIV **3**, f° 236^v ; XIV **4**, f° 238^r, entourée par une scholie). Pour XIV **3-4**, ainsi que pour le Lemme SEMR, les indentations prévues en fin de Proposition (f° 237^v, f° 239^r, f° 240^r) sont restées vides.
Les marges portent des scholies dont certaines sont tronquées au bord, car le format du manuscrit a été quelque peu réduit. Celles que l'on peut lire ont été éditées par Heiberg[3].

Si l'on consulte l'apparat critique de l'édition de Heiberg — ou les notes infrapaginales de notre texte qui s'y rapportent — on remarquera aisément une dualité entre manuscrits, d'un côté le seul ***M,*** qui, rappelons-le, transmet le Livre XIV, mais pas les *Éléments,* de l'autre, des manuscrits contenant les *Éléments,* ***PBVv.*** Heiberg considère que ***M*** porte un meilleur texte et il le privilégie donc dans l'établissement de son édition. Nous partageons son avis[4], sauf peut-être en deux lieux, l'un, à la fin de la Proposition XIV **4**, l'autre, à celle du Lemme SEMR. La situation n'est donc pas sans rappeler le clivage entre ***P*** et les manuscrits théoniens dans l'histoire du texte des *Éléments* proprement dits, mais ce rapprochement tourne court. Non seulement il n'y a aucune divergence structurelle entre

---

[3] Voir *infra,* § 4.
[4] Voir les notes 7, 16, 21 (préface) ; 25, 26, 31 (XIV **1**) ; 46, 48 (ajout à XIV **1** et transition) ; 55 (XIV **1/2**) ; 71 (XIV **2**) ; 98, 99, 101, 107 (XIV **2/3**) ; 128 (XIV **3**) ; 138 (XIV **3/3***alit*) ; 161, 164, 167, 169 (XIV **3***alit*) ; 182, 186, 190, 193, 206 (XIV **4**) ; 219 (XIV **5**).

les textes des deux familles, mais, contrairement à ce qu'il se passe dans les Livres I à XIII, pratiquement aucune séquence du type de celles que nous avons baptisée *IPI* et dont l'existence est corrélée aux interventions éditoriales qu'a subies le texte des *Éléments*[5] n'est propre à l'une de ces deux familles.

Les écarts entre ***M*** et ***PBVv*** — on en trouve un peu plus de 220, réparties dans presque toutes les unités textuelles, — sont, pour une grande partie d'entre elles (soit 180), tout à fait mineures, par exemple une bonne centaine de petites lacunes ou de petits ajouts (selon le point de vue que l'on adopte) inférieurs à 3 mots (le plus souvent des articles ou le verbe "être" !), tantôt dans ***M*** (41), tantôt dans ***PBVv*** (62), quelques confusions entre prépositions, des inversions de 2 ou 3 mots (17), des erreurs ou échanges dans le lettrage. Une cinquantaine d'écarts sont un peu plus importants qui affectent quelque peu le sens. ***M*** est globalement plus laconique, mais plusieurs divergences peuvent s'expliquer par un saut du même au même, et c'est tantôt ***M***, tantôt la famille ***PBVv*** qui l'a subi. En revanche, quelques-unes supposent une intervention éditoriale volontaire, plutôt que la distraction des copistes, par exemple la substitution d'une phraséologie en termes de carrés, en lieu et place d'une expression en terme de "puissance", dans l'énoncé du Lemme XIV **1/2**. Il se peut aussi que des corrections, après une corruption ou une mutilation initiale, expliquent ponctuellement des états différents du texte, par exemple dans la préface, à la fin de la Proposition XIV **4**, ou à la fin du Lemme SEMR[6].

NB : Dans le texte grec qui suit, les indications du type "préface", "ajout", "N", placées entre crochets angulaires < >, sont ajoutées par nous, sauf mention explicite du contraire dans la note d'apparat associée, le cas échéant. Le lecteur trouvera deux types de diagrammes, selon qu'il consulte les textes (grec et arabes) ou les traductions françaises. Pour celles-ci, nous proposons des diagrammes mathématiquement et métriquement corrects. Pour les éditions, nous avons préféré conserver certains traits saillants des figures transmises par les manuscrits qui ne suivent pas nécessairement ce principe de représentation "exacte". Par exemple, dans les sections 7-8 du texte grec, un pentagone régulier est dessiné dans les manuscrits comme un carré surmonté d'un triangle isocèle ! Dans d'autres cas, par exemple pour les sections 4-5, on observe une divergence marquante entre deux familles de manuscrits. Notre lecteur aura donc un accès minimal à ce genre d'informations, étant entendu qu'il ne s'agit pas de reproductions "photographiques" des diagrammes portés par les manuscrits. L'annexe 7 offrira quelques informations supplémentaires sur les variations diagrammatiques que nous avons observées.

[5] C'est ce que nous avons montré dans la notice déjà citée « *Sur les problèmes textuels dans les Livres stéréométriques* » dans [Euclide-Vitrac, 2001], pp. 32-71, en particulier pp. 61-71. Une seule exception ici : la référence livresque dans XIV **3** (renvoi à XIII 17 Porisme) mentionnée à la note 128.

[6] Voir comm. *ad loc.*

2. Texte grec du Livre XIV

<Préface>

Βασιλείδης ὁ Τύριος, ὦ Πρώταρχε, παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν καὶ συσταθεὶς τῷ πατρὶ ἡμῶν διὰ τὴν ἀπὸ τοῦ μαθήματος συγγένειαν συνδιέτριψεν αὐτῷ τὸν πλεῖστον τῆς ἐπιδημίας χρόνον. καί ποτε ζητοῦντες[7] τὸ ὑπὸ Ἀπολλωνίου συγγραφὲν[8] περὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, τίνα ἔχει λόγον[9] πρὸς ἄλληλα, ἔδοξαν ταῦτα μὴ ὀρθῶς γεγραφηκέναι[10] τὸν Ἀπολλώνιον, αὐτοὶ δὲ ταῦτα καθάραντες[11] ἔγραψαν, ὡς ἦν ἀκούειν τοῦ πατρός. ἐγὼ δὲ ὕστερον περιέπεσον ἑτέρῳ βιβλίῳ ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδεδομένῳ περιέχοντί τινα ἀπόδειξιν[12] περὶ τοῦ προκειμένου, καὶ μεγάλως ἐψυχαγωγήθην ἐπὶ τῇ τοῦ προβλήματος ζητήσει. τὸ μὲν οὖν[13] ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδοθὲν ἔοικε κοινῇ σκοπεῖν· καὶ γὰρ περιφέρεται δοκοῦν[14] ὕστερον γεγράφθαι[15] φιλοπόνως· ὅσα δ’ ἐγὼ[16] δοκῶ δεῖν[17], ὑπομνηματισάμενος ἔκρινα προσφωνῆσαί σοι διὰ μὲν[18] τὴν ἐν ἅπασι τοῖς[19] μαθήμασι[20], μάλιστα δὲ ἐν γεωμετρίᾳ προκοπὴν ἐμπειρικῶς κρινοῦντι[21] τὰ ῥηθησόμενα, διὰ δὲ τὴν πρὸς τὸν πατέρα συνήθειαν καὶ τὴν πρὸς ἡμᾶς εὔνοιαν[22] εὐμενῶς ἀκουσομένῳ τῆς πραγματείας. καιρὸς δ’ ἂν εἴη τοῦ μὲν προοιμίου[23] πεπαῦσθαι, τῆς δὲ συντάξεως ἄρχεσθαι.

<1>[24]

Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου τινὸς ἐπὶ τὴν τοῦ πενταγώνου πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου κάθετος ἀγομένη ἡμίσειά ἐστι συναμφοτέρου τῆς

---

[7] ζητοῦντες] ζητοῦντες εἰ λοῦνται ***M***, διελόντες ***V***, διελοῦντες ***PB***, διελθόντες ***v***.
[8] συγγραφὲν] γραφὲν ***PBVv***.
[9] ἔχει λόγον] λόγον ἔχει ταῦτα ***PBVv***.
[10] γεγραφέναι] γραφὲν ***PBVv***.
[11] καθάραντες] διακαθάραντες ***BVv***, διακαθάροντες ***P***.
[12] περιέχοντί τινα ἀπόδειξιν] καὶ περιέχοντί ἀπόδειξιν ***PBVv*** ; *post* ἀπόδειξιν add. ὑγιῆ ***V***, ὑγιῶς ***PBv***.
[13] οὖν] m. 2 ***V***, om. ***PBv***.
[14] δοκοῦν] τὸ δ’ ὑφ’ ἡμῶν δοκοῦν ***PBVv***.
[15] γεγράφθαι] γεγραφεν supra scr. αι m. rec. ***P***, γεγραφέναι ***BVv***.
[16] δ’ ἐγὼ] om. ***PBVv***.
[17] δοκῶ δεῖν] corr. Heiberg ; δοκεῖν corr. in δεῖν m. 1 ***M***, δοκεῖν ***PBVv***.
[18] μὲν] om. ***PBVv***.
[19] τοῖς] om. ***PBVv***.
[20] μαθήμασι] μαθήμασιν, corr. ex μαθηματικήν m. 1 ***P***.
[21] κρινοῦντι] κρίνοντι ***PBVv***.
[22] καὶ τὴν πρὸς ἡμᾶς εὔνοιαν] om. ***M***. Saut du même au même sur la séquence “-ιαν” (συνήθειαν → εὔνοιαν) ?
[23] εἴη τοῦ μὲν προοιμίου] εἴη προοιμίου μὲν ***PBVv***.
[24] α´ ***P***.

τε τοῦ ἑξαγώνου[25] καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου πλευρᾶς[26] τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ ἔστω[27] πενταγώνου[28] πλευρὰ ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω κέντρον[29] τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἀπὸ τοῦ Δ[30] κάθετος ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν[31] ἐπ' εὐθείας τῇ ΔΕ εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΔΑ[32]. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῆς[33] τοῦ δεκαγώνου τῶν[34] εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΓ, ΓΖ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου ἐπὶ τὸ Γ[35] ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

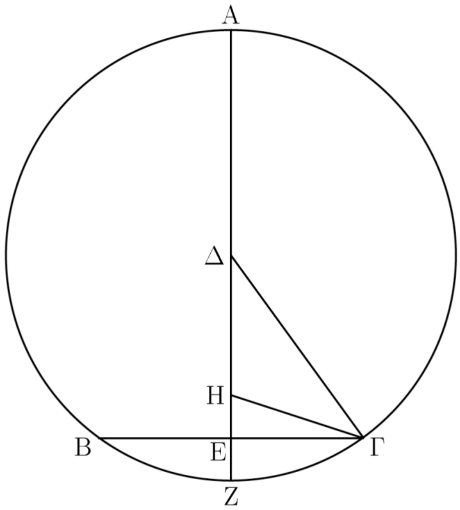
ἐπεὶ οὖν πενταπλασία ἐστὶν ὅλου τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τῆς ΒΖΓ περιφερείας, καί ἐστι τῆς μὲν ὅλου τοῦ κύκλου περιφερείας ἡμίσεια ἡ ΑΓΖ, τῆς δὲ ΒΖΓ ἡμίσεια ἡ ΖΓ, καὶ ἡ ΑΓΖ ἄρα περιφέρεια πενταπλασία ἐστὶ τῆς ΖΓ περιφερείας. τετραπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΖΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΖΔΓ γωνίαν. τετραπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΖΔΓ. διπλῆ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΕΖΓ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ τῆς ὑπὸ ΗΔΓ[36]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΗΓ. διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΓ τῆς ὑπὸ ΗΔΓ. ἴση ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΗΓ. ἀλλὰ ἡ ΗΓ τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΓΖ. ἴση δὲ καὶ ἡ ΗΕ τῇ ΕΖ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΕ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΖΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΔ. συναμφότερος ἄρα ἡ ΔΖΓ διπλῆ τῆς ΔΕ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΔΖ ἴση τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ[37], ἡ δὲ ΖΓ ἴση τῇ τοῦ δεκαγώνου· ἡ ΔΕ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῆς[38] τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

---

[25] τε τοῦ ἑξαγώνου] ἐκ τοῦ κέντρου ***PBVv.***
[26] πλευρᾶς] om. ***PBVv.***
[27] ἔστω] om. ***PBVv.***
[28] πενταγώνου] πενταγώνου ἰσοπλεύρου ***PBVv.***
[29] κέντρον] τὸ κέντρον ***PBVv.***
[30] ἀπὸ τοῦ Δ] om. ***PBVv.***
[31] ἐκβεβλήσθωσαν] ἐκβεβλήσθω ***PBVv.***
[32] εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΔΑ] εὐθεῖα ἡ ΑΕΖ ***PBv*** ; ἐπ' ... ΔΑ] ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Ζ ***V.***
[33] τῆς] om. ***PBVv.***
[34] τῶν] πλευρᾶς τῶν ***PBVv.***
[35] ἀπὸ ... τὸ Γ] om. ***V.***
[36] διπλῆ ... ὑπὸ ΗΔΓ] om. ***M.***
[37] πλευρᾷ] om. ***PBVv.***
[38] τῆς] om. ***PBVv.***

<Ajout>[39]

Φανερὸν δὴ ἐκ τοῦ[40] ἐν τῷ ιγ´[41] βιβλίῳ θεωρήματος[42], ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου[43] κάθετος ἀγομένη ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου[44].



[45] Ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀρισταίου[46] ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ τῶν ε̂[47] σχημάτων συγκρίσει[48], ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον διὰ τὸ τὴν αὐτὴν εἶναι κάθετον[49] ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου[50] τρίγωνον. γραπτέον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου[50] τρίγωνον[51] τῶν εἰς τὴν αὐτὴν[52] σφαῖραν ἐγγραφομένων, προγραφέντος τοῦδε.

---

[39] πόρισμα mg. m. rec. ***V***.
[40] τοῦ] τῶν ***PBVv***.
[41] ιγ´] τρισκαιδεκάτῳ ***PBv***.
[42] θεωρήματος] θεωρημάτων ***PBVv***.
[43] τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου] τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου ***PBVv***.
[44] κύκλου] κύκλου · ὅπερ ἔδει δεῖξαι ***P***.
[45] β´ ***P***.
[46] Ἀρισταίου] Ἀριστερου ***PBVv***.
[47] τῶν ε̂] ε̂ ***V***, πέντε ***PBv***.
[48] συγκρίσει] σύγκρισις ***PVv*** et e corr. m. 2 ***B***.
[49] κάθετον] εὐθεῖαν ***M***.
[50] πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου] om. ***P***.
[51] γραπτέον δὲ ... τρίγωνον] om. ***M***. Saut du même au même à partir de la fin de la phrase précédente ?
[52] αὐτὴν] om. ***M***.

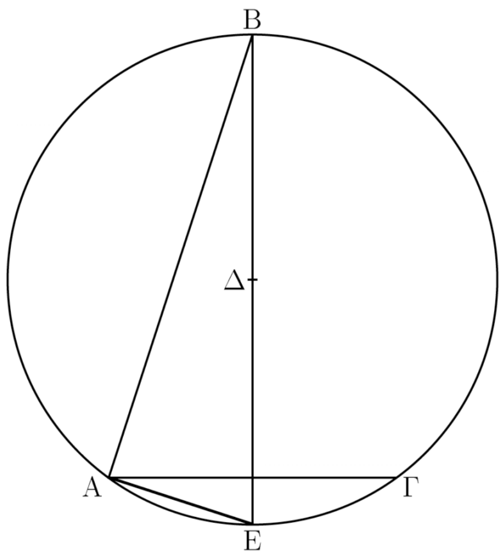
<2>

Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον[53] ἐγγραφῇ, ἡ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσα καὶ ἡ τοῦ πενταγώνου συναμφότερος δυνάμει τῆς ἐκ τοῦ κέντρου πενταπλασία ἐστίν[54].

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ πενταγώνου πλευρὰ ἔστω ἡ ΑΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω[55] ἡ ΔΖ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Β, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ τετραγώνου.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· δεκαγώνου ἄρα ἐστὶν[56] ἡ ΑΕ.

καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΕ τῆς ΕΔ, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ[57] τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑΕ[58]. τετραπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑΕ[59] τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ. πενταπλάσια ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑΕ, ΕΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ[60]. πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ[61].



[53] τε καὶ ἰσογώνιον] om. ***PBVv***.
[54] ἡ ὑπὸ δύο ... ἐστίν] τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὑπὸ δύο πλευρῶν (corr. in πλευρὰς ***V***) τοῦ πενταγώνου (ἐὰν add. ***V***) ὑποτεινούσης εὐθείας πενταπλάσιον ἔσται (ἐστι ***V***) τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (τοῦ κύκλου om. ***V***) ***PBVv.***
[55] ἤχθω] om. ***PBVv***.
[56] ἐστὶν] om. ***PBVv***.
[57] ἐστὶ] om. ***PBVv***.
[58] ΒΑΕ] ΒΑ, ΑΕ ***PBVv***.
[59] τῶν ΒΑΕ] ΒΑ, ΑΕ ***Vv.***
[60] πενταπλάσια ... τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ] πενταπλάσια δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ ἴσον τὸ ἀπὸ ΑΓ ***PB*** (saut du m. au m.), ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ πενταπλάσια ἐστιν τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ***Vv*** (ἐστιν, τῆς om. ***v***), ἄρα τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΕ, ΕΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ mg m. 2 ***P***.
[61] ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ... ἀπὸ τῆς ΔΕ] ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΒΑ ... ἀπὸ ΔΕ ***PBVv***.

[62] Τούτου δεδειγμένου δεικτέον, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

<3>

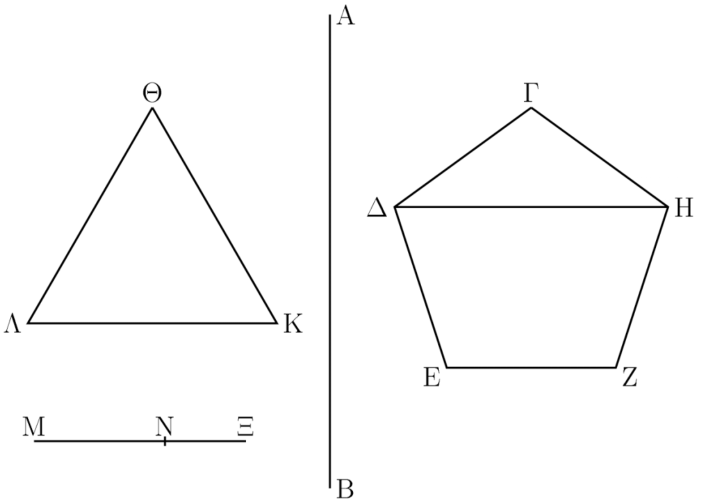
᾿Εκκείσθω ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ AB, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὴν[63] δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, καὶ ἔστω ἓν μὲν τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ, τοῦ[64] εἰκοσαέδρου δὲ τρίγωνον τὸ ΚΛΘ[65]. λέγω, ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν περὶ αὐτὰ κύκλων ἴσαι εἰσί, τουτέστιν ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό τε ΓΔΕΖΗ πεντάγωνον καὶ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον.
᾿Επεζεύχθω ἡ ΔΗ· κύβου ἄρα ἐστὶν[66] ἡ ΔΗ.
ἐκκείσθω δή τις εὐθεῖα ἡ ΜΝ, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς[67] AB τοῦ ἀπὸ τῆς[67] ΜΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. ἡ ΜΝ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται[68]. τετμήσθω ἡ ΜΝ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἔστω μεῖζον[69] τμῆμα ἡ ΜΞ. δεκαγώνου ἄρα ἡ ΜΞ[70].
καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι[71] τὸ ἀπὸ τῆς[67] AB τοῦ ἀπὸ τῆς[67] ΜΝ, τριπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς[67] AB τοῦ ἀπὸ τῆς[67] ΔΗ, τρία ἄρα τὰ ἀπὸ ΔΗ ἴσα εἰσὶ[71] πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΝ. ὡς δὲ τρία τὰ ἀπὸ ΔΗ πρὸς τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ, οὕτως[72] πέντε τὰ ἀπὸ ΜΝ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ ΜΞ. πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΜΞ καὶ πέντε τὰ ἀπὸ ΜΝ ἴσα εἰσὶ πέντε τοῖς ἀπὸ ΚΛ[73]. πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα εἰσὶ[74] τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΓΗ καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΔΗ[75]. ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα εἰσὶ δεκαπέντε[76] τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ[77] τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον κύκλου[78], τρία δὲ τὰ ἀπὸ ΔΗ καὶ τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ ἴσα εἰσὶ ιε̅[79] τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ

---

[62] γʹ ***P***.
[63] αὐτὴν] τὴν αὐτὴν σφαῖραν ***PBVv***, δηλονότι εἰς τὴν σφαῖραν mg ***M***.
[64] τοῦ] om. ***PBVv***.
[65] ΚΛΘ] Θ in ras. ***B***, ΚΛΒ ***P***.
[66] ἐστὶν] πλευρὰ ***PBVv***.
[67] τῆς] om. ***PBVv***.
[68] ἡ ΜΝ ἄρα ... ἀναγέγραπται] om. ***BVv*** ; ἡ ΜΝ ἐστιν ὁ τοῦ κύβου τοῦ ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται ***P***.
[69] μεῖζον] τὸ μεῖζον ***PBVv***.
[70] δεκαγώνου ἄρα ἡ ΜΞ] om. ***M***.
[71] ἐστι] om. ***PBVv***.
[72] οὕτως] οὕτως ἐστι ***PBVv***.
[73] πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΜΞ καὶ πέντε τὰ ἀπὸ ΜΝ ἴσα εἰσὶ πέντε τοῖς ἀπὸ ΚΛ] om. ***PBVv.***
[74] πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα εἰσι] om. ***V***.
[75] τοῖς ἀπὸ ΓΗ καὶ ... ἀπὸ ΔΗ] τοῖς ἀπὸ ΔΗ ... τοῖς ἀπὸ ΓΗ ***PBVv***.
[76] δεκαπέντε] δέκα καὶ πέντε ***B*** *(α* post ras. 1 litt.*)* ***Vv***, δὲ καὶ πέντε ***P***.
[77] τῆς ἐκ] om. ***M***, τῶν ἐκ ***PBVv***.
[78] κύκλου] om. ***M***
[79] εἰσι ιε̅] ἐστὶ δέκα καὶ πέντε ***PBVv***.

τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου κύκλου περὶ τὸ ΓΔΕΖΗ· προεδείχθη γὰρ τὸ[80] ἀπὸ τῆς[81] ΔΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς[81] ΓΗ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου[82] τοῦ[83] περιγραφομένου περὶ τὸ πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ. δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα ἐστὶ δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου[84]· ἡ ἄρα διάμετρος ἴση τῇ διαμέτρῳ.

Ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.



<4>[85]

᾿Εὰν ᾖ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον καὶ περὶ αὐτὸ[86] κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῇ, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

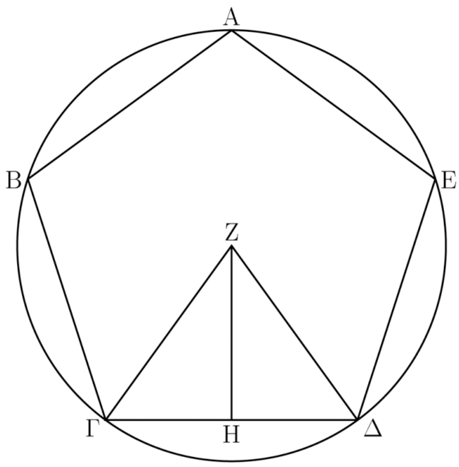
Ἔστω πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ[87], καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου[88] τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΗ. λέγω, ὅτι τὸ τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ[89] ἴσον ἐστὶ[90] δώδεκα πενταγώνοις τοῖς ΑΒΓΔΕ[91].

---

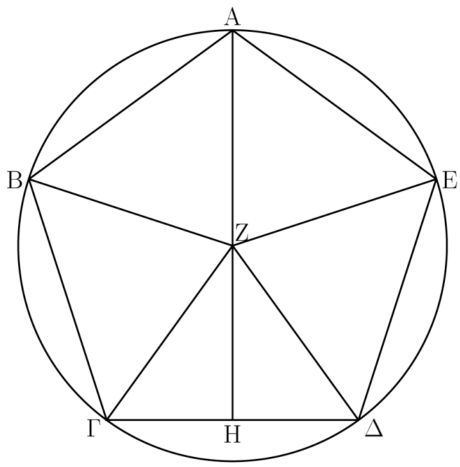
[80] τὸ] τὰ ***PBVv***.
[81] τῆς] om. ***PBVv***.
[82] τοῦ κύκλου] om. ***PBv***, supra scr. ***V***.
[83] τοῦ] om. ***M***.
[84] ἴσα ἐστὶ δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ ... κέντρου] om. ***M*** ; ἴσα ἐστὶ τοῖς δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ ... κέντρου ***PBv*** ; *post.* κέντρου, ἓν ἄρα τῶν ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου (ἴσον ἐστὶ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου) add. ***V*** ; ἴσον ἄρα ἐστὶ ἑνὶ τῶν ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου add. ***PBv***.
[85] δʹ] ***P***.
[86] αὐτὸ] τοῦτο ***PBVv***.
[87] ὁ ΑΓΔ] om. ***PBVv***.
[88] τοῦ κύκλου] om. ***PBVv***.
[89] ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ] ὑπὸ τῆς ΓΔ, ΖΗ ***M***, ὑπὸ ΓΔ, ΗΖ ***PBVv***.
[90] ἐστὶ] om. ***PBV.***
[91] ΑΒΓΔΕ] ΑΒΓΔ ***M***, ΑΒΓΔΕ καὶ ***V*** (καὶ del. Heiberg)

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΖΔ.

ἐπεὶ οὖν[92] τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΓΖΔ[93] τριγώνου, τὸ ἄρα πεντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ δέκα τρίγωνά ἐστι[94]. καὶ πάντα ἑξάκις. τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ[95] τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.



"Mss *MV*"



"Mss *PB*"

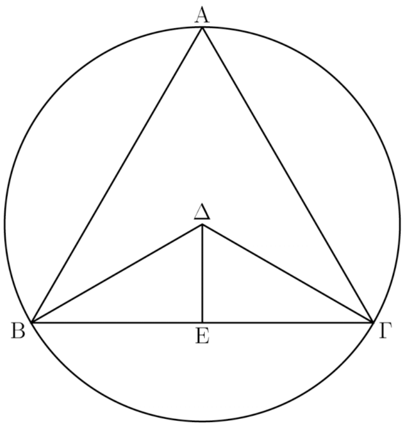
<5>

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι[96], ἐὰν ᾖ ἰσόπλευρον τρίγωνον[97] τὸ ΑΒΓ καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, κάθετος δὲ ἐπὶ τὴν ΒΓ[98] ἡ ΔΕ, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ.

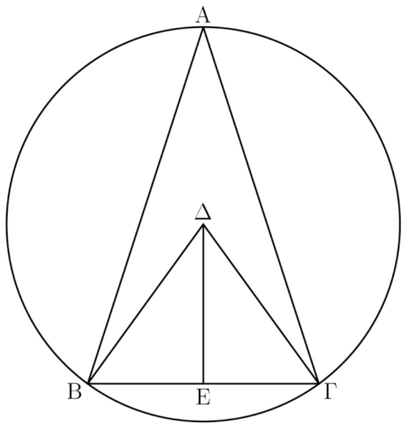
Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΒΓ[99] τριγώνου[100], δύο ἄρα τρίγωνα τὰ ΔΒΓ[101] ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ. καὶ πάντα τρίς· ἓξ ἄρα τρίγωνα τὰ ΔΒΓ ἴσα[102] τρισὶ τοῖς ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ. ἓξ δὲ τρίγωνα τὰ ΔΒΓ[103] δύο ἐστὶ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ. τρία ἄρα τὰ ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ[104] ἴσα ἐστὶ δυσὶ[105] τοῖς ΑΒΓ. καὶ πάντα δεκάκις. τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ ἴσον ἐστὶν εἴκοσι τοῖς ΑΒΓ

[92] ἐπεὶ οὖν] καὶ ἐπεὶ *V*, ἐπὶ *P*, ἐπεὶ ***Bv*** (*i.e.* οὖν om. ***PBVv***).
[93] ΓΖΔ] ΓΔΖ ***PBVv***.
[94] ἐστι] ἐστιν ἴσα ***PBVv***, add. τὰ δὲ δέκα τρίγωνα δύο ἐστὶ πεντάγωνα ***PBVv*** (micro-variantes dans *V*).
[95] ἴσον ἐστὶ] add. δώδεκα πενταγώνοις. Δώδεκα δὲ πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐστιν ἐπιφάνεια· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ ***PBVv***.
[96] ὅτι] ὅτι καὶ ***PBVv***.
[97] ἰσόπλευρον τρίγωνον] τρίγωνον ἰσόπλευρον ὡς ***PBVv***.
[98] δὲ ἐπὶ τὴν ΒΓ] om. ***PBVv***.
[99] ΔΒΓ] ΑΒΓ ***PBM***.
[100] τριγώνου] om. ***PBVv***.
[101] τὰ ΔΒΓ] om. ***PBVv***.
[102] τὰ ΔΒΓ ἴσα] τὰ ΑΒΓ ἴσα εστὶ ***PBVv***.
[103] τὰ ΔΒΓ] ὡς τὰ ΔΓΒ ***PBVv.***
[104] δύο ἐστὶ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ. τρία ἄρα τὰ ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ] om. ***PBVv***.
[105] δυσὶ] δύο ***PBVv***.

τριγώνοις, τουτέστι τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ. ὥστε καὶ[106] ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως[107] τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς αὐτου[108] καὶ τῆς ἀπὸ[109] τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ[110] πεντάγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τῆς ἀπὸ[111] τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων εἰκοσαέδρου καὶ δωδεκαέδρου.



Ms *M*



Mss *PBV*

<6>[112]

Τούτου δήλου[113] ὄντος δεικτέον, ὅτι[114] ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν[115], οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

Ἐκκείσθω κύκλος ὁ[116] περιλαμβάνων τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων ὁ ΑΒΓ[117], καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓ[118] κύκλον εἰκοσαέδρου μὲν πλευρὰ ἡ ΓΔ, δωδεκαέδρου δὲ ἡ ΑΓ[119]. τριγώνου μὲν ἄρα[120] ἰσοπλεύρου ἐστὶ[121] πλευρὰ ἡ ΓΔ,

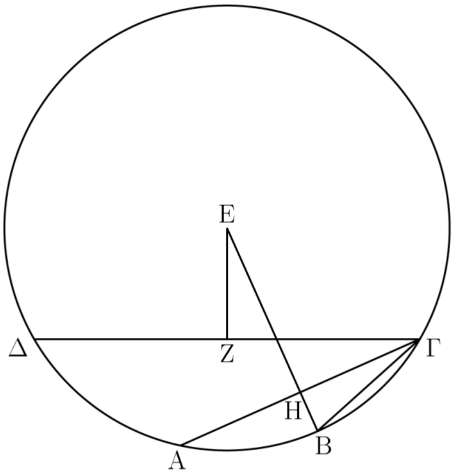
---

[106] καὶ] ἔσται ***PBVv***.
[107] οὕτως] add. τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ. ἐκ δὴ τούτο φενερόν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ***PBVv***.
[108] αὐτου] τοῦ πενταγώνου ***PBVv***.
[109] ἀπὸ] ἐκ ***Vv***, ὑπὸ τῆς ἐκ ***PB***.
[110] ΑΒΓΔΕ] om. ***PBVv***.
[111] ἀπὸ] ἐκ ***V***, ὑπὸ ***PBv***.
[112] ϵ´] ***P***.
[113] δήλου] om. ***M***.
[114] ὅτι] ὅτι ἐστὶν ***V***, ὅτι ἔσται ***PBv***.
[115] ἐπιφάνειαν] om. ***PBVv***.
[116] ὁ] om. ***PBVv***.
[117] ΑΒΓ] corr in ΔΒΓ ***P***, ΔΒΓ ***BVv***.
[118] ΑΒΓ] ΔΒΓ ***PBVv***.
[119] εἰκοσαέδρου μὲν πλευρὰ ἡ ΓΔ, δωδεκαέδρου δὲ ἡ ΑΓ] om. ***PBVv***.

πενταγώνου δὲ ἡ ΑΓ. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΔΓ, ΓΑ[122] κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ[123], καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΗ[124] εὐθεῖα ἡ ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἐκκείσθω κύβου πλευρὰ ἡ Θ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν[115], οὕτως ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρου τῆς ΒΕ, ΒΓ[125] ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΕ, καί ἐστι συναμφοτέρου μὲν τῆς ΕΒΓ ἡμίσεια ἡ ΕΗ, τῆς δὲ ΒΕ ἡμίσεια ἡ ΕΖ, τῆς[126] ΕΗ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΕΖ. ἔστι δὲ καὶ τῆς Θ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης[127] τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ[128]. ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΕ[129] πρὸς τὴν ΕΖ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕ, Θ[130] τῷ ὑπὸ ΓΑ, ΕΗ.

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕ, Θ[130] πρὸς τὸ ὑπὸ[131] ΓΔ, ΖΕ, τῷ δὲ ὑπὸ ΖΕ, Θ[130] ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΗΕ[129], ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν[132] ΓΑ, ΗΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν[132] ΓΔ, ΖΕ, τουτέστιν ἡ[133] τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν. ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν[134], οὕτως ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ[135].



---

[120] ἄρα] om. ***PBVv***.
[121] ἐστὶ] om. ***PBVv***.
[122] ΔΓ, ΓΑ] ΓΔ, ΑΓ ***PBVv***.
[123] ΕΗ] ΗΕ ***PBVv***.
[124] τῇ ΕΗ] scr. Heiberg τῆς ΕΗ ***PBv***, τῆς ΕΒ ***M***, ἡ ΕΗ corr. ex ἡ Η m. 2 ***V***.
[125] ΒΕ, ΒΓ] ΕΒ, ΒΓ corr. ex ΕΒΓ m. 2 ***V***, ΕΒΓ ***PBv***.
[126] τῆς] καὶ τῆς ***PBVv***.
[127] τεμνομένης] τεμνημένης ***BV***, τεμνημένα ***P*** τεμνημένοις ***v***, sed corr. m. 1.
[128] ἔστι δὲ ... ΑΓ] m. 2 ***V*** / ΑΓ] ΓΑ ***PBVv*** add. ὡς ἐν τῇ δωδεκαέδρῳ ἐδείχθη ; ***V*** *supra* scr. πορίσματι.
[129] ΗΕ] ΕΗ ***PBVv***.
[130] ΖΕ, Θ] Θ, ΖΕ ***PBVv***.
[131] ΓΑ, ΕΗ. καὶ ἐπεί ... τὸ ὑπὸ] om. ***M***.
[132] τῶν] om. ***PBVv***.
[133] ἡ] ὡς ἡ ***PBVv***.
[134] ὡς ἄρα ... ἐπιφάνειαν] om. ***PBVv***.
[135] ΓΔ] ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι, ***P***.

<7>[136]

Καὶ[137] ἄλλως δεῖξαι, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, προγραφέντος τοῦδε·

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐγγεγράφθωσαν[138] εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ[139] ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ[140] ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΔ εὐθεῖα ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια[141] ἡ ΔΖ, ἡ δὲ ΗΓ τῆς ΓΘ ἔστω τριπλῆ[142]. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΘ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ.

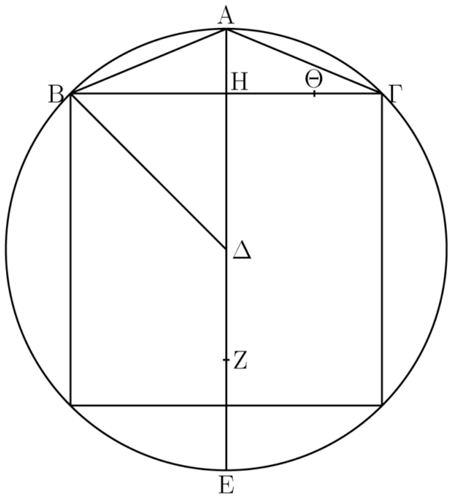
Ἀπὸ γὰρ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΖ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ ἡ ΑΖ. πάλιν ἐπεὶ τριπλῆ ἐστιν ἡ ΗΓ τῆς ΓΘ, διπλῆ ἡ ΗΘ τῆς ΘΓ. ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ τῆς ΘΗ. ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς τὴν[143] ΗΘ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ[144] ΑΖ, ΗΘ τῷ ὑπὸ ΑΔ[145], ΓΗ. ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΗΒ[146] ἴση[147]. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔ, ΗΒ τῷ ὑπὸ ΖΑ, ΗΘ ἴσον ἐστίν[148]. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΗΒ δύο ἐστὶ τρίγωνα τὰ ΑΒΔ[149]. καὶ τὸ ὑπὸ ΖΑ, ΗΘ ἄρα δύο ἐστὶ τρίγωνα τὰ ΑΒΔ[150]. ὥστε καὶ[151] πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ[144] ΑΖ, ΗΘ δέκα ἐστὶ τρίγωνα[152]. δέκα δὲ τρίγωνα δύο ἐστὶ πεντάγωνα. πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ[144] ΑΖ, ΗΘ δύο πενταγώνοις ἴσα ἐστίν. ἐπεὶ οὖν[153] διπλῆ ἐστιν ἡ ΗΘ τῆς ΘΓ, τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ διπλοῦν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ. δύο ἄρα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ[154] ἴσα ἐστὶ[155] τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ[156]. καὶ δέκα ἄρα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶ[157] πέντε τοῖς ὑπὸ[144] ΑΖ, ΗΘ, τουτέστι δύο πενταγώνοις. ὥστε πέντε τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ. πεντάκις δὲ τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ,

---

136 ϛʹ ***P***.
137 καὶ] om. ***PBVv***.
138 ἐγγεγράφθωσαν] ἐγγεγράφθω ***PBV***.
139 πλευραὶ αἱ] om. ***P***
140 ἡ] εὐθεῖα ἡ ***PBVv***.
141 ἡμίσεια] εὐθείας ἡμίσεια ***PBVv***.
142 ἔστω τριπλη] τριπλη ἔστω ***PBVv***.
143 τὴν] om. ***PBVv***.
144 ὑπὸ] ἀπὸ ***M***.
145 ΑΔ] ΔΑ ***PBVv***.
146 ΗΒ] ΒΗ ***PBVv***.
147 ἴση] ἴση ἐστί ***PVv***, ἴση ἐστίν ***B***.
148 τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔ, ΗΒ ... ΖΑ, ΗΘ ... ἴσον ἐστίν] τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔ, ΒΗ ἴσον ἐστί τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΘΗ ***PBVv***.
149 ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΗΒ ... τὰ ΑΒΔ] τὸ δὲ ὑπὸ ΑΔ, ΒΗ ... ὡς τὰ ΑΒΔ ***PBVv***.
150 ΖΑ, ΗΘ ἄρα δύο ἐστὶ τρίγωνα τὰ ΑΒΔ] ἄρα om. ***M***, ΑΖ, ΗΘ ἄρα δύο ἐστὶ τὰ ΑΒΔ ***PBVv***.
151 ὥστε καὶ] om. ***PBVv***.
152 ἐστὶ τρίγωνα] τρίγωνα ἐστὶ ***PBVv***.
153 ἐπεὶ οὖν] καὶ ἐπεὶ ***BVv***, καὶ ἐπεὶ δὲ ***P***.
154 τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ] om. ***M***.
155 ἐστὶ] ἐστὶ ἑνι ***v***, ἐστιὺ ἑνι ***PBV***.
156 ΗΘ] ΘΗ ***PBVv***.
157 καὶ δέκα ... ἴσα ἐστὶ] om. ***PB***.

ΒΘ[158], ἐπειδὴ πενταπλῆ ἐστιν ἡ ΒΘ[158] τῆς ΘΓ, καὶ κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ ΑΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΖ, ΒΘ[158] ἴσον ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ.



<8>[159]

Τούτου δήλου ὄντος νῦν ἐκκείσθω ὁ περιλαμβάνων κύκλος[160] τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων ὁ ΑΒΓ[161], καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ε ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ[162] τὸ Ζ, καὶ ἔστω ἡ ΑΕ τῆς ΕΗ διπλῆ, τριπλῆ δὲ ἡ ΚΓ τῆς ΘΓ[163], καὶ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΗΔ τῇ ΗΜ[164]. τριγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου ἐστὶν[165] ἡ ΔΜ.

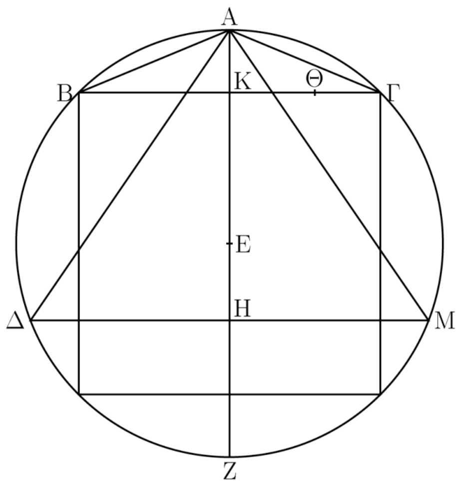
ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΑΜ[166]. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΜ τρίγωνον.

καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΗΔ τῷ ΑΔΜ[167] τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, οὕτως τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΒΘ, ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, οὕτως[168] ἡ ΒΘ πρὸς τὴν[169] ΔΗ. καὶ ὡς ἄρα δώδεκα αἱ ΒΘ[170] πρὸς εἴκοσι τὰς ΔΗ, οὕτως δώδεκα

---

[158] ΒΘ] ΘΒ ***PBVv***.
[159] ζ′ ***P***.
[160] ὁ περιλαμβάνων κύκλος] κύκλος ὁ περιλαμβάνων ***PBVv***.
[161] ὁ ΑΒΓ] om. ***PBVv***.
[162] ἐπὶ] ἡ ΑΕ ἐπὶ ***PBVv***.
[163] ΘΓ] ΓΘ ***PBVv***.
[164] πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΗΔ τῇ ΗΜ] πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΜ ***PBVv***.
[165] ἰσοπλεύρου ἐστὶν] ἐστὶν ἰσοπλεύρου ***PBVv***.
[166] ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΑΜ] om. ***PBVv***.
[167] ΑΔΜ] om. ***PBVv***.
[168] οὕτως] om. ***PBVv***.
[169] τὴν] om. ***PBVv***.
[170] ΒΘ] ΘΒ ***PBVv***.

πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, τουτέστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου. καί εἰσι[171] δώδεκα μὲν αἱ ΒΘ δέκα αἱ ΒΓ· ἡ μὲν γὰρ ΒΘ τῆς ΘΓ ἐστι πενταπλῆ, ἡ δὲ ΒΓ τῆς ΓΘ ἐστιν ἑξαπλῆ[172]. ἓξ[173] ἄρα αἱ ΒΘ ἴσαι εἰσὶ πέντε[174] ταῖς ΒΓ. καὶ τὰ διπλάσια δέ[175]. εἴκοσι[176] δὲ αἱ[177] ΔΗ δέκα εἰσὶν αἱ ΔΜ· διπλῆ γὰρ ἡ ΔΜ τῆς ΔΗ. ὡς ἄρα δέκα αἱ ΒΓ πρὸς δέκα τὰς ΔΜ[178], οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν. καί ἐστιν ἡ μὲν ΒΓ ἡ τοῦ κύβου[179] πλευρά, ἡ δὲ ΔΜ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΜ, τουτέστιν ἡ τοῦ κύβου[180] πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.



<9>[181]

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ εὐθείας οἱασδηποτοῦν[182] τμηθείσης ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὡς ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος[183] τμήματος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τοῦ κύβου[184] πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

---

[171] εἰσι] ἐστι ***PBVv***.
[172] τῆς ΓΘ ἐστιν ἑξαπλῆ] τῆς ΘΓ ἑξαπλῆ ***PBVv***.
[173] ἓξ] ιβ ***V***, δώδεκα ***PBv***.
[174] πέντε] δέκα ***PBVv***.
[175] καὶ τὰ διπλάσια δέ] om. ***PBVv***.
[176] εἴκοσι] αἱ εἴκοσι ***M***.
[177] αἱ] ἡ ***PBVv***.
[178] ΔΜ] add. τουτέστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΔΜ ***PBVv***.
[179] ΒΓ ἡ τοῦ κύβου] ΒΓ τοῦ κύκλου ***M***.
[180] κύβοῦ κύκλου ***M.***
[181] η´ ***P***.
[182] οἱασδηποτοῦν] ἡσδηποτοῦν ***PBVv***.
[183] ἐλάττονος] ***M***, comp. ***V***, ἐλάσσονος ***PBv***.
[184] κύβου] κύκλου ***M***.

Ἔστω ὁ περιλαμβάνων κύκλος[185] τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων ὁ ΑΘΒ[186], καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Γ, καὶ προσεκβεβλήσθω τις, ὡς ἔτυχεν, ἀπὸ τοῦ Γ σημείου[187] ἡ ΓΒ καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Δ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἔστω ἡ ΓΔ[188]. δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν[189] ἡ ΓΔ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου.

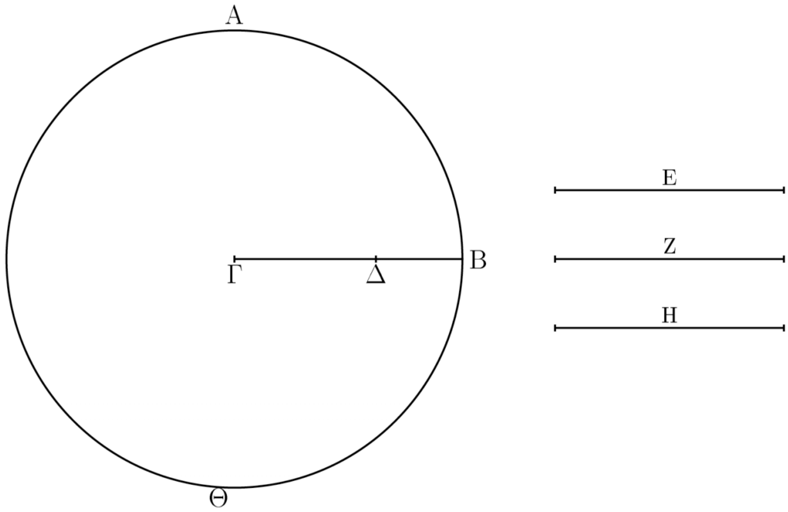
ἐκκείσθω δὴ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ Ε, δωδεκαέδρου δὲ ἡ Ζ, κύβου δὲ ἡ Η. ἡ μὲν ἄρα Ε τριγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρά, ἡ δὲ Ζ πενταγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, ἡ δὲ Ζ τῆς Η μεῖζόν ἐστι τμῆμα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης[190].

ἐπεὶ ἡ Ε ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾷ, ἡ δὲ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου πλευρὰ[191] δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ΒΓ [τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ][192], ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒΔ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ ΓΔ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ[193]. ἐναλλάξ, ὡς[194] τὸ ἀπὸ τῆς[195] Ε πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν[196] ΓΒ, ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς[195] ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς[195] ΓΔ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ[197] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς[195] ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς[195] Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς[195] Ζ· μεῖζον γάρ ἐστι τμῆμα ἡ Ζ τῆς Η. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς[195] Ε πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ[198]. ἐναλλὰξ[199] καὶ ἀνάπαλιν· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ε[200], οὕτως τὸ ἀπὸ Ζ[201] πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒΔ[202]. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς[203] Ζ ἴσα[204] τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓΔ[205]· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰν καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων[206]. ὡς

[185] ὁ περιλαμβάνων κύκλος] κύκλος (κύβος ***B***) ὁ ΑΒ (Α ***P***) περιλαμβάνων ***PBVv***.
[186] ὁ ΑΘΒ] om. ***PBVv***.
[187] ὡς ἔτυχεν, ἀπὸ τοῦ Γ σημείου] ἀπὸ τοῦ Γ ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ***PBVv***.
[188] καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἔστω ἡ ΓΔ] καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἔστω ἡ ΓΔ ***V***, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἐστιν ἡ ΓΔ ***PBv***.
[189] πλευρά ἐστιν] πλευρὰ ***V***, ἐστι πλευρὰ ***PBv***.
[190] ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης] καὶ ***PBVv***.
[191] πλευρὰ] om. ***M***.
[192] τριπλάσιον ... τῆς ΒΓ] om. ***M***.
[193] ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ] καὶ ***PBVv***.
[194] ὡς] ὡς ἄρα ***PBVv***.
[195] τῆς] om. ***PBVv***.
[196] τῶν] om. ***PBVv***.
[197] τῆς ΒΓ] τῆς ΓΒ ***M***, ΒΓ ***PBVv***.
[198] τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ] τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Η ***M***.
[199] ἐναλλὰξ] καὶ ἐναλλὰξ ***PBVv***.
[200] τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ε] τὸ ἀπὸ τῆς Ε ***M*** (saut du même au même ?)
[201] τὸ ἀπὸ Ζ] ἡ Ζ ***M***.
[202] ΓΒΔ] ΓΒ, ΒΔ ***PBVv***.
[203] τῆς] om. ***PBVv***.
[204] ἴσα] ἴσα εἰσὶ ***Vv***, ἴσα εἰσὶν ***PB***.
[205] τῶν ΒΓΔ] ***M***, ΒΓΔ ***PB***, ΒΓ, ΓΔ ***v*** et ***V*** (ΓΔ in ras.)
[206] τῶν εἰς ... ἐγγραφομένων] om. ***PBVv***.

ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς[207] Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς[207] Ε, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓΔ[208] πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒΔ[209]. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε[210], οὕτως εὐθείας[211] ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης τὸ ἀπὸ τῆς[212] ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος[213]. καί ἐστιν ἡ μὲν Η κύβου πλευρά, ἡ δὲ Ε εἰκοσαέδρου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν[214] τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.



<10>[215]

Καὶ δεικτέον[216], ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου.

---

[207] τῆς] om. ***PBv***.
[208] τῶν ΒΓΔ] ***M***, ΒΓΔ ***PB***, ΒΓ, ΓΔ ***v*** et ***V*** (Γ^2 in ras.).
[209] τῶν ΓΒΔ] ***M***, ΓΔΒ ***B***, ΔΓΒ ***P***, ΓΒ, ΒΔ ***Vv*** ; deinde add. ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΒΓΔ (ΒΓ, ΓΔ ***v*** et e corr. ***V***) πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒΔ (ΓΔΒ ***B***, ΓΒ, ΒΔ ***Vv***), οὕτως εὐθείας ἡσδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης ἡ δυναμένη (ἡ δυναμένη om. ***V***) τὸ ἀπὸ τῆς (ἀπὸ τῆς in ras., add. δυναμένης τὸ ἀπὸ τῆς e corr. ***V***) ὅλης καὶ τὸ (τῷ) ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην (τὴν δυναμένην om. ***V***) τὸ ἀπὸ (τὸ ἀπὸ supra scr. m. 1 ***V***, deinde add. τῆς δυναμένης τὸ ἀπὸ) τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος (ἐλάττονος ***P***) τμήματος ***PBVv***.
[210] τὸ ἀπὸ τῆς Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε] καὶ ὡς ἄρα ἡ Η πρὸς τὴν Ε ***V***.
[211] εὐθείας] εὐθείας ἡσδηποτοῦν ***PBVv***.
[212] τῆς] om. ***M***.
[213] τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης ... ἐλάττονος τμήματος] ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ (πρὸς τὸ ***P***) ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος (ἐλάσσονος ***Bv***) τμήματος ***PBVv***.
[214] πλευρὰν] om. ***PBVv***.
[215] θʹ ***P***.
[216] Καὶ δεικτέον] ***M*** ; δεικτέον δὴ νῦν ***PBVv***.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι κύκλοι περιλαμβάνουσι τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ἐν δὲ ταῖς σφαίραις οἱ ἴσοι κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι τέ εἰσι καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων πεσοῦνται[217]. ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περιλαμβάνοντος κύκλου[218] τό τε τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι εἰσίν[219]. ἰσοϋψεῖς ἄρα εἰσὶν αἱ πυραμίδες αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνα καὶ αἱ[220] βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνα. αἱ δὲ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ὡς ἄρα τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ[221] πεντάγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ τρίγωνον[222], κορυφὴν[223] δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. καὶ ὡς ἄρα δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, οὕτως δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ δώδεκα μὲν[224] πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐστὶν ἐπιφάνεια[225], εἴκοσι δὲ τρίγωνα ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου[226], οὕτως ῑβ πυραμίδες πενταγώνους ἔχουσαι βάσεις[227] πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καί εἰσι ῑβ μὲν πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου, εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ[228] εἰκοσαέδρου. καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν[229], οὕτως τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου, ἐδείχθη[230] ἡ[231] τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτως τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου.

---

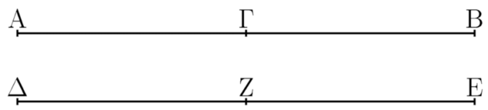
[217] πεσοῦνται] πίπτουσιν ***PBVv***.
[218] τοῦ περιλαμβάνοντος κύκλου] κύκλου (corr. in κύκλων ***V***) τοῦ (om. ***V***, supra scr. τοῦ τε m. 2) περιλαμβάνοντος ***PBVv***.
[219] κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι εἰσίν] ἀγόμεναι ἴσαι (ἴσα ***P***) εἰσί(ν), τουτεστιν αἱ κάθετοι ***PBVv***.
[220] αἱ] om. ***M***.
[221] τὸ] τὸ τοῦ δωδεκαέδρου ***PBVv***.
[222] τὴν βάσιν ... τρίγωνοὺ] ἧς βάσις μέν (om. ***PB***) ἐστι τό τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον ***PBVv***.
[223] κορυφὴν] κορυφὴ ***PBVv***.
[224] μὲν] om. ***PBVv***.
[225] ἐστὶν ἐπιφάνεια] ἐπιφάνεια ἐστιν ***PBVv***.
[226] εἰκοσαέδρου] εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν ***PBVv***.
[227] ἔχουσαι βάσεις] βάσεις ἔχουσαι ***PBVv***.
[228] δωδεκαέδρου, εἴκοσι ... στερεὸν τοῦ] om. ***M*** (saut du m. au m. ?)
[229] ἐπιφάνειαν] om. ***PBVv***.
[230] ἐδείχθη] οὕτως ἐδείχθη ***PBVv***.
[231] ἡ] om. ***M***.

<11>

῞Οτι δέ, ἐὰν[232] δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, ἐν ἀναλογίᾳ εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ, δείξομεν οὕτως·

Τετμήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒ[233] ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἔστω ἡ ΑΓ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΔΕ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ[234] μεῖζον αὐτῆς τμῆμα[235] ἔστω ἡ ΔΖ. λέγω, ὅτι ὡς ὅλη ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ὅλη ἡ ΔΕ πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν ΔΖ[236].

᾽Επεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς[237] ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς[237] ΔΖ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς[237] ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς[237] ΔΖ. καὶ ὡς τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ[238] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕΖ[239] πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ[240]. καὶ συνθέντι ὡς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς[237] ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ[241] τῆς[237] ΑΓ, οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς[237] ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς[237] ΔΖ. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. καὶ μήκει ὡς συναμφότερος ἡ ΑΒΓ μετὰ τῆς ΑΓ[242], τουτέστι δύο αἱ ΑΒ, πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΔΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ, τουτέστι δύο αἱ ΔΕ, πρὸς τὴν ΔΖ. καὶ τὰ ἡμίση, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ[243], οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν[244] ΔΖ.



<12>

Καὶ[245] ὅτι εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης τὸν λόγον, ὃν[246] ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς

[232] ῞Οτι δέ, ἐὰν] Καὶ τὰ ἑξῆς ὅτι δέ, ἐὰν ***P***, Καὶ ἑξῆς ὅτι ἐὰν ***BV***, Καὶ τὰ ἑξῆς ὅτι ἐὰν ***v***.
[233] ΑΒ] ΑΒ εὐθεῖα ***PBVv***.
[234] καὶ τὸ] τὸ δὲ ***PBVv***.
[235] μεῖζον αὐτῆς τμῆμα] ***MV*** ; μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ***PBv***, *idem* Pappus.
[236] πρὸς τὴν ΑΓ ... ΔΖ] ; πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν ΑΓ, οὕτως ὅλη ἡ ΔΕ (ἡ ὅλη ἡ ΔΕ in ***P***) πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν ΔΖ ***PBVv***.
[237] τῆς] om. ***PBVv***.
[238] ΑΒΓ] ΑΒ, ΒΓ ***PBVv***.
[239] ΔΕΖ] ΔΕ, ΕΖ ***PBVv***.
[240] ΔΖ] τῆς ΔΑ ***M***.
[241] ἀπὸ] om. ***PBVv***.
[242] καὶ μήκει ... μετὰ τῆς ΑΓ] καὶ μήκει ὡς συναμφότερος ἡ ΑΒΓ πρὸς (τὴν ***V***) ΑΓ, οὕτως συναμφότερος (οὖν ἀμφ. ***P***) ἡ ΔΕΖ (ΔΕ, ΕΖ ***v***, Δ$^{\mathrm{E}}$Ζ ***V***) προς (τὴν add. ***V***) ΔΖ, (καὶ supra scr. ***V***) συνθέντι ὡς συναμφότεραι (-ροι ***PBv***) αἱ ΑΒΓ (ΑΒ, ΒΓ ***v***) μετὰ τῆς ΑΓ πρὸς ΑΓ, οὕτως συναμφότεραι αἱ ΔΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ πρὸς ΔΖ, τουτέστι δύο αἱ ΔΕ πρὸς ΔΖ ***PBVv***.
[243] καὶ τὰ ἡμίση, ... ΑΓ] καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ ***PBVv***.
[244] τὴν] om. ***PBVv***.
[245] Καὶ] δεδειγμένου δὴ τοῦδε ***PBVv***.
[246] τὸν λόγον, ὃν] ὃν λόγον ***PBVv***.

τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ[247] τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τοῦτον ἔχει ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

δεδειγμένου δὲ καὶ τοῦδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, προσενηνεγμένου δὲ καὶ τοῦδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον διὰ τὸ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιλαμβάνεσθαι τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, δῆλον, ὅτι, ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, λόγον ἕξει εὐθείας ἡσδηποτοῦν[248] ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης ὡς[249] ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος.

Τούτων δὴ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων δῆλον, ὅτι, ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον[250], τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον[251] λόγον ἕξει[252] εὐθείας ἡσδηποτοῦν[248] ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης ὡς[249] ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, τουτέστιν ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν[253], ὡς δὲ ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν[254], οὕτως[255] εὐθείας ἡσδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον[256] τμῆμα, ὡς ἄρα τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, εὐθείας[257] ἡσδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον[256] τμῆμα.

[247] τὸ ἀπὸ] om. ***PBVv***.
[248] ἡσδηποτοῦν] οἱασδηποτοῦν ***PBVv***.
[249] ὡς] om. ***PBVv***.
[250] λόγον ἕξει εὐθείας ... τμήματος. Τούτων δὴ ... τε καὶ εἰκοσάεδρον] dittog. ***P***.
[251] τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον] om. ***M***.
[252] ἕξει] ἕξει ὃν ***PBVv***.
[253] ἐπιφάνειαν, τουτέστιν ... πλευράν] om. ***PBVv***.
[254] πλευράν] om. ***PBVv***.
[255] οὕτως] οὕτως ἐστὶν ***PBVv***.
[256] ἔλαττον] ἔλασσον ***M***.
[257] εὐθείας] οὕτως εὐθείας ***PBVv***.

3. Traduction du texte grec du Livre XIV

<Préface>

Basilide de Tyr, ô Protarque[258], lorsqu'il vint à Alexandrie et fut mis en relation avec mon père à cause de l'affinité [qui leur venait] de l'étude, s'entretint avec lui pendant presque toute la durée de son séjour. Un jour, cherchant à comprendre l'écrit d'Apollonius « *Sur la comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits dans la même sphère* », notamment quel est leur rapport mutuel, ils furent d'avis qu'Apollonius n'en avait pas traité correctement et ils en rédigèrent eux-mêmes une version corrigée, comme je l'ai entendu de mon père. Mais moi-même, plus tard, je tombai sur un autre livre publié par Apollonius, contenant une démonstration sur la question proposée et je me réjouis grandement de son approche du problème. Ainsi donc il est à portée de tout un chacun d'examiner l'écrit publié par Apollonius, puisqu'il semble en effet avoir été mis en circulation après avoir été ultérieurement repris avec soin. Quant à moi, tout ce que j'ai jugé devoir rédiger sous forme de mémoire[259], j'ai décidé de te l'envoyer, d'abord parce qu'à cause de ton niveau général dans toutes les disciplines, et, surtout en géométrie, tu auras un jugement d'expert sur ce qui est va être dit, ensuite, parce qu'à cause de tes liens avec mon père et de ta bienveillance à mon égard, tu prêteras une oreille favorable à mon travail. Mais il est temps d'en finir avec le préambule et d'entamer avec ordre l'exposé lui-même.

<1> = [Proposition 1][260]

La perpendiculaire menée à partir du centre d'un certain cercle sur le côté du pentagone inscrit dans ce même cercle est la moitié du côté de l'hexagone et de celui du décagone, les deux ensemble, ceux inscrits dans le même cercle.

Soit un cercle ΑΒΓ et dans le cercle ΑΒΓ soit ΒΓ un côté de pentagone, et que soit pris [le] centre du cercle, Δ, et qu'à partir de Δ soit menée ΔΕ perpendiculaire à ΒΓ, et que les droites ΕΖ, ΔΑ prolongent ΔΕ en alignement. Je dis que ΔΕ est moitié du [coté] de l'hexagone et de celui du décagone inscrits dans le même cercle.

---

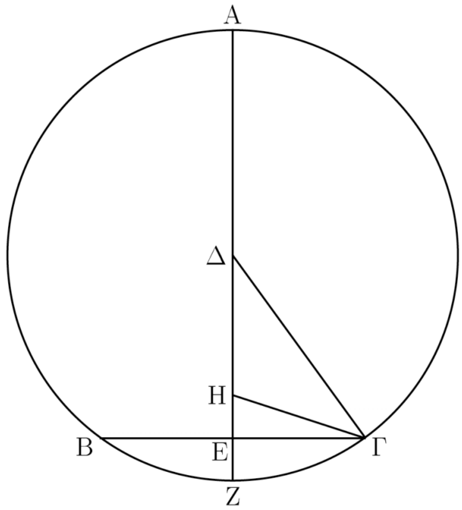
[258] Sur les identités probables de Basilide de Tyr et de Protarque, sur l'interprétation générale de cette préface, voir *supra,* I Présentation, § 2.

[259] Le texte de la famille ***PBVv*** présente plusieurs variantes (voir *supra,* notes 7, 12, 14-17) qui altèrent le sens ; certaines offensent la grammaire comme le parfait actif (γεγραφέναι), malgré le complément d'agent « ὑφ' ἡμῶν », au lieu du parfait passif (γεγράφθαι) comme dans ***M***. Le découpage en trois phrases de ***M*** est également meilleur que celui de ***PBVv*** en seulement deux**.** Quoi qu'il en soit, la dernière portion est problématique (Heiberg l'a corrigée, voir *supra* note 17) et on ne voit pas bien comment rendre compte de ces deux versions du texte. Pour celle de ***PBVv***, voir la traduction donnée dans le Tableau 4 de l'ANNEXE.

[260] Nous ajoutons, entre crochets carrés [ ], des titres correspondant aux statuts des unités textuelles du Livre XIV, en conformité avec le découpage que nous avons proposé *supra,* I, § 3 et *infra,* ANNEXE, Tableau 3.

En effet que ΔΓ, ΓΖ soient jointes, et que soit placée ΗΕ égale à ΕΖ[261], et qu'à partir du point Η jusqu'à Γ soit jointe ΗΓ.

Puis donc que la circonférence totale du cercle est quintuple de l'arc ΒΖΓ, que d'une part l'arc ΑΓΖ est moitié de la circonférence totale du cercle, d'autre part l'arc ΖΓ moitié de ΒΖΓ[262], l'arc ΑΓΖ est donc aussi quintuple de l'arc ΖΓ[263]. ΑΓ est donc quatre fois ΖΓ. Or comme ΑΓ [est] relativement à ΖΓ, ainsi [est] l'[angle] sous ΑΔΓ relativement à l'angle sous ΖΔΓ[264]. L'angle sous ΑΔΓ est donc quatre fois celui sous ΖΔΓ. Or celui sous ΑΔΓ est deux fois celui sous ΕΖΓ[265]. Celui sous ΕΖΓ est donc deux fois celui sous ΗΔΓ[266]. Or il se trouve aussi que celui sous ΕΖΓ est égal à celui sous ΕΗΓ[267]. Celui sous ΕΗΓ est donc aussi deux fois celui sous ΗΔΓ. ΔΗ est donc égale à ΗΓ[268]. Mais ΗΓ est égale à ΖΓ[269]. ΔΗ est donc aussi égale à ΓΖ. Or ΗΕ est aussi égale à ΕΖ. ΔΕ est donc égale à ΕΖ, ΖΓ, les deux ensemble. Que ΕΔ soit ajouté de part et d'autre. ΔΖ, ΖΓ, les deux ensemble est donc deux fois ΔΕ. Et d'une part ΔΖ est égale au côté de l'hexagone, d'autre part ΖΓ est égale à celui du décagone; ΔΕ est donc la moitié du [côté] de l'hexagone et de celui du décagone, ceux qui sont inscrits dans le même cercle.



[261] Dans ***M*** et ***V*** une scholie établit que ΔΕ est plus grande que ΕΖ, ce qui justifie la construction de ΗΕ faite ici et la disposition des points sur le diagramme. Cf. *infra,* scholies N°2-3.
[262] Tentative de justification dans la scholie N°4.
[263] D'après *Él.* V 15. Cf. *infra,* les scholie N°5-7.
[264] D'après *Él.* VI 33. Cf. *infra* les scholies N°9-10.
[265] D'après *Él.* III 20 (en considérant l'angle ΑΖΓ à la place de ΕΖΓ) ou par la conjonction de *Él.* I 5 et 32, appliquées au triangle isocèle ΔΖΓ. Les scholies 11-12, respectivement dans ***M*** et ***V***, optent pour la seconde solution, formulée différemment avec quelques détails, notamment une *CNI* de I 32a, dans la N°12.
[266] Tentative de justification dans la scholie N°13.
[267] D'après *Él.* I 4 appliquée aux triangles rectangles ΓΕΖ, ΓΕΗ, ce qu'explicitent les scholies 14-15.
[268] Par la conjonction de *Él.* I 32 et 6, et appliquées au triangle ΔΗΓ. Cf. scholie 16.
[269] D'après *Él.* I 4 appliquée aux triangles rectangles ΓΕΖ, ΓΕΗ. Les trois droites ΔΗ, ΗΓ et ΓΖ sont donc égales et on reconnaît la disposition géométrique mise en œuvre par Euclide dans IV 10 pour la construction du pentagone régulier inscrit dans un cercle. Voir *infra,* note complémentaire 5.1.

[Ajout à la Proposition 1]

Il est alors évident à partir d'un théorème du Livre XIII, que la perpendiculaire menée à partir du centre du cercle sur le côté du triangle équilatéral est la moitié du rayon du cercle[270].

[Transition]

Le même cercle comprend à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère. Ceci est établi par Aristée, dans son écrit *Sur la comparaison des 5 figures,* et, par ailleurs, Apollonius, dans la deuxième édition de sa *Comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre,* [a établi] que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi aussi est le dodécaèdre lui-même relativement à l'icosaèdre à cause du fait que c'est la même perpendiculaire [qui est menée] à partir du centre de la sphère sur le pentagone du dodécaèdre et sur le triangle de l'icosaèdre. Et nous-mêmes devons aussi établir que le même cercle comprend à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère, en ayant préalablement établi ceci[271].

<2> = [Lemme 1/2]

Si un pentagone équilatéral et équiangle est inscrit dans un cercle, la droite sous-tendue par deux côtés et le côté du pentagone, sont, les deux ensemble, quintuples en puissance du rayon[272].

Soit un cercle ABΓ, et soit, dans le cercle ABΓ, un côté de pentagone AΓ et que soit pris le centre du cercle Δ, et que soit menée ΔZ, perpendiculaire à AΓ, et qu'elle soit prolongée vers B, E, et que soit jointe AB[273]. Je dis que les carrés sur BA, AΓ sont quintuples du carré sur ΔE.

Que soit jointe AE ; donc AE est le [côté] du décagone.

Et puisque BE est deux fois EΔ, le [carré] sur BE est donc quadruple de celui sur EΔ. Or celui sur BE est égal à ceux sur BA, AE[274]. Ceux sur BA, AE sont donc quadruples de

---

[270] Déjà dans Campanus, puis dans les éditions d'Oxford et de Peyrard, cette assertion est introduite par "Corollaire". Cf. l'ajout dans le ms ***V*** (*supra,* note 39). Cela dit, il ne s'agit en aucun cas d'un Porisme à XIV. 1, mais d'un résultat analogue, pour le triangle équilatéral, qui découle de XIII. 12. Ce que démontrent (différemment) les scholies 18-19, respectivement dans ***M*** et ***V***; la seconde reproduit même le diagramme de XIII 12.

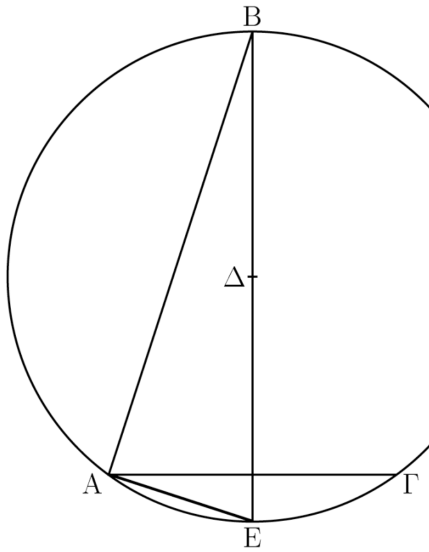
[271] Sur l'interprétation générale de cette transition, voir *supra,* I Présentation, § 5.

[272] Formulation différente dans les mss ***PBVv***, en accord avec celle du diorisme. Voir la traduction donnée dans le Tableau 4 de l'ANNEXE. La divergence est analogue à celle observée entre traditions directe et indirecte au début du Livre XIII (Prop. XIII 1-3).

[273] La scholie 20 justifie que cette droite AB est bien celle qui sous-tend — ou qui est sous-tendue par — deux côtés du pentagone. Le texte n'utilise pas la désignation "diagonale" du pentagone, ce que les *Éléments* ne font pas non plus d'ailleurs.

[274] D'après *Él.* III 31 et I. 47, ce que détaille la scholie 21.

celui sur ΔE. Ceux sur BA, AE, EΔ sont donc quintuples de celui sur ΔE. Or à ceux sur ΔE, EA est égal celui sur AΓ[275]. Ceux sur AB, AΓ sont donc quintuples de celui sur ΔE.



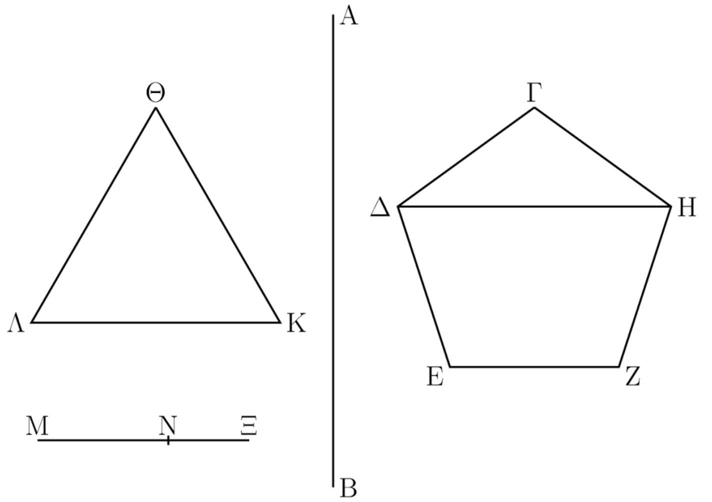
<3> ~ [Proposition 2][276]

Ceci étant démontré, il faut démontrer que le même cercle comprend à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère.
Que soit proposé le diamètre de la sphère, AB, et, qu'en elle, soient inscrits à la fois un dodécaèdre et un icosaèdre, et soit d'une part ΓΔEZH, un pentagone du dodécaèdre, d'autre part KΛΘ, un triangle de l'icosaèdre. Je dis que les rayons des cercles qui leur sont circonscrits sont égaux, autrement dit que le même cercle comprend le pentagone ΓΔEZH et le triangle KΛΘ.
Que soit jointe ΔH. ΔH est donc le côté du cube[277].
Que soit proposée une certaine droite MN de sorte que le [carré] sur AB soit quintuple de celui sur MN. Or il se trouve aussi que le diamètre de la sphère est quintuple, en puissance, du rayon du cercle sur lequel l'icosaèdre a été décrit[278]. MN est donc égale au rayon du cercle sur lequel l'icosaèdre a été décrit. Que MN soit coupée en extrême et moyenne raison selon le point Ξ, et que son plus grand segment soit MΞ. MΞ est donc le côté du décagone[279].

---

[275] D'après *Él.* XIII 10 (la scholie 22 en fournit une *CNI*).
[276] La section numérotée **3** par Heiberg commence seulement à l'ecthèse, deux lignes plus bas, en désaccord avec l'indication portée par le manuscrit ***P*** (voir *supra* note 62) ; pour Heiberg, les deux lignes qui suivent ne sont donc pas considérées comme l'énoncé général du théorème dont on aurait ensuite l'ecthèse.
[277] Sous-entendu « inscrit dans la même sphère » et sur lequel est construit le dodécaèdre comme cela est établi dans *Él.* XIII 17, ce que justifient, chacune à leur manière, les scholies 23-24.
[278] D'après *Él.* XIII 16 Por.
[279] Sous-entendu « régulier, inscrit dans le cercle sur lequel l'icosaèdre a été décrit ». C'est ce que démontre la Proposition que nous avons appelée XIII 9^{bis}, qu'établit aussi la scholie 25. Voir aussi *infra* III, § 2.

Et puisque le [carré] sur AB est quintuple de celui sur MN, que celui sur AB est triple de celui sur ΔH[280], trois carrés sur ΔH sont donc égaux à cinq sur MN. Or comme trois de ceux sur ΔH [sont] relativement à trois de ceux sur ΓH, ainsi sont cinq de ceux sur MN relativement à cinq de ceux sur MΞ[281]. Et cinq de ceux sur MΞ et cinq de ceux sur MN sont cinq de ceux sur KΛ[282]. Cinq de ceux sur KΛ sont donc égaux à trois de ceux sur ΓH et trois de ceux sur ΔH[283]. Mais d'une part cinq de ceux sur KΛ sont égaux à quinze de ceux sur le rayon du cercle circonscrit autour du triangle ΘKΛ[284][xix], d'autre part trois de ceux sur ΔH et trois de ceux sur ΓH sont égaux à 15 de ceux sur le rayon du cercle cironscrit autour de ΓΔEZH[285]. Quinze carrés sur le rayon [de l'un des cercles] sont donc égaux à quinze carrés sur le rayon [de l'autre cercle]; le diamètre est donc égal au diamètre. Le même cercle comprend donc à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère.



[Lemme 2/3]

Si l'on a un pentagone équilatéral et équiangle et, autour de lui, un cercle et qu'à partir du centre soit menée une perpendiculaire sur un côté, trente fois le [rectangle] contenu par l'un des côtés et la perpendiculaire est égal à la surface du dodécaèdre.

---

280 D'après *Él.* XIII 15 Por. La scholie 27 en rappelle le contenu.

281 En combinant *Él.* XIII 8, le lemme SEMR, *Él.* VI 22 et V 15. Le texte grec transmis est ici plutôt rapide et plusieurs scholies (26-31) essaient d'en combler les silences. La N°31 cite l'énoncé du Lemme SEMR ; la N°26 essaie de reprendre la totalité du raisonnement, non sans confusion. Voir *infra,* note complémentaire 5.2.

282 D'après *Él.* XIII 10. Ce que rappellent les scholies 25, 26 (référence livresque et *CNI*), 32 et 33 (qui préfèrent se référer à la construction de l'icosaèdre XIII 16).

283 On a $3\Delta H^2 : 3H\Gamma^2 :: 5MN^2 : 5M\Xi^2$ et $3\Delta H^2 = 5MN^2$, donc $3H\Gamma^2 = 5M\Xi^2$ et $3\Delta H^2 + 3H\Gamma^2 = 5MN^2 + 5M\Xi^2 = 5K\Lambda^2$.

284 D'après *Él.* XIII 12 $K\Lambda^2 = 3$(rayon du cercle circonscrit autour du triangle ΘKΛ)^2. La scholie 34 le rappelle.

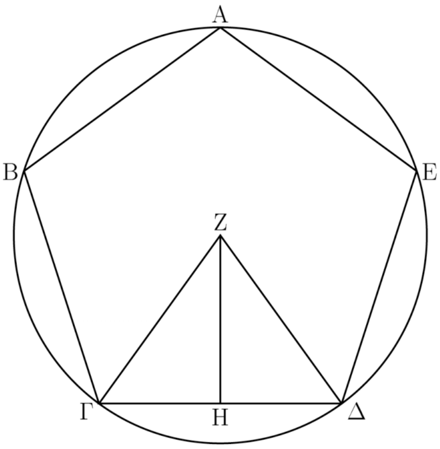
285 D'après le Lemme XIV **1/2** immédiatement et explicitement rappelé dans ce qui suit.

Soit un pentagone équilatéral et équiangle ΑΒΓΔΕ et autour du pentagone un cercle ΑΓΔ et que soit pris le centre du cercle Ζ, et qu'à partir de Ζ soit menée ΖΗ, perpendiculaire à ΓΔ.

Je dis que trente fois le [rectangle] contenu par ΓΔ, ΖΗ est égal à douze pentagones ΑΒΓΔΕ.

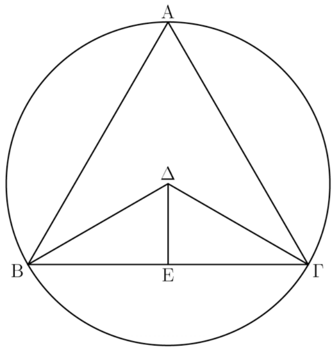
Que ΓΖ, ΖΔ soient jointes.

Puis donc que le [rectangle] contenu par ΓΔ, ΖΗ est double du triangle ΓΖΔ[286], cinq fois le [rectangle] contenu par ΓΔ, ΖΗ est donc dix triangles[287]. Et tout ceci, six fois. Trente fois le [rectangle] contenu par ΓΔ, ΖΗ est donc égal à la surface du dodécaèdre.



Alors semblablement nous démontrerons que si l'on a un triangle, ΑΒΓ, équilatéral, et autour de lui un cercle et que Δ soit le centre du cercle et ΔΕ perpendiculaire à ΒΓ, trente fois le [rectangle] contenu par ΒΓ, ΔΕ est égal à la surface de l'icosaèdre.

Puisqu'en effet de nouveau le [rectangle] contenu par ΔΕ, BC est double du triangle ΔΒΓ, deux triangles ΔΒΓ sont donc égaux au [rectangle] contenu par ΔΕ, ΒΓ. Et tout ceci trois fois. Six triangles ΔΒΓ sont donc égaux à trois [rectangles] contenus par ΔΕ, ΒΓ. Or six triangles ΔΒΓ sont deux triangles ΑΒΓ. Trois [rectangles] contenus par ΔΕ, ΒΓ sont donc égaux à deux triangles ΑΒΓ. Et tout ceci dix fois.



Trente [rectangles] contenus par ΔΕ, ΒΓ sont donc égaux à vingt triangles ΑΒΓ, c'est-à-dire à la surface de l'icosaèdre[288].

De sorte aussi que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi [est] le [rectangle] contenu par son côté et la perpendiculaire menée sur lui à partir du centre du cercle autour du pentagone ΑΒΓΔΕ, relativement au [rectangle] contenu par le côté de l'icosaèdre et la perpendiculaire menée sur lui à partir du centre du cercle autour du triangle[289], ceux de l'icosaèdre et du dodécaèdre inscrits dans la même sphère[290].

---

[286] D'après *Él.* I 41. Cf. scholie 35.

[287] Ce que justifie la scholie 36 en préconisant la jonction des droites ΑΖ, ΒΖ, ΖΕ. Elles apparaissent sur le diagramme des manuscrits ***PB***, mais pas ***MV***. Autre justification paraphrastique dans la scholie 37.

[288] Justification paraphrastique dans la scholie 38.

[289] Justification paraphrastique dans la scholie 39.

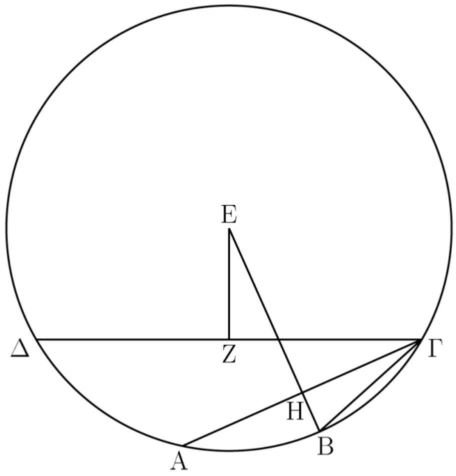
[290] L'hypothèse que les deux polyèdres sont inscrits dans une même sphère n'est pas utile pour établir cette proportion. Mais c'est dans ce cadre que le Lemme sera utilisé dans XIV **3**. C'est ce que remarque l'auteur de la scholie 40.

<6> = [Proposition 3]

Cela étant clair, il faut démontrer que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi est le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre.
Que soit proposé un cercle ΑΒΓ, qui comprend à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère[291], et que dans le cercle ΑΒΓ soit inscrit d'une part ΓΔ, un côté de l'icosaèdre, d'autre part ΑΓ, un du dodécaèdre. Donc d'une part ΓΔ est un côté d'un triangle équilatéral, d'autre part ΑΓ celui d'un pentagone.
Et que soit pris le centre du cercle, E, et qu'à partir de E soient menées EZ, EH perpendiculaires à ΔΓ, ΓΑ, et que la droite HB prolonge EH en alignement, et que ΒΓ soit jointe[292], et que soit proposé Θ le côté du cube.
Je dis que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi est Θ relativement à ΓΔ.
En effet puisque BE, ΒΓ, les deux ensemble, étant coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est BE[293], et, d'une part, que de EB, ΒΓ, les deux ensemble, la moitié est EH[294], d'autre part, que la moitié de BE est EZ[295], la droite EH étant coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est donc EZ[296]. Or il se trouve aussi que Θ étant coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est ΑΓ[297]. Donc comme Θ [est] relativement à ΓΑ, ainsi [est] HE relativement à EZ[298]. Le rectangle contenu par ZE, Θ est donc égal à celui contenu par ΓΑ, EH[299].
Et puisque comme Θ [est] relativement à ΓΔ, ainsi est le rectangle contenu par ZE, Θ relativement à celui contenu par ΓΔ, ZE[300], mais que celui contenu par ZE, Θ est égal à celui contenu par ΓΑ, HE, donc, comme Θ [est] relativement à ΓΔ, ainsi est celui contenu par ΓΑ, HE relativement à celui contenu par ΓΔ, ZE, c'est-à-dire la surface du dodécaèdre relativement à la surface de l'icosaèdre[301].
Donc, comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi [est] Θ relativement à ΓΔ.

---

291 D'après XIV **2**.
292 La scholie 41 remarque et justifie le fait que ΒΓ est donc le côté du décagone.
293 D'après *Él.* XIII 9 dont la scholie 42 fournit une *CNI.*
294 Grâce à XIV **1**, comme le relève les scholies 43 et 49.
295 Grâce à l'ajout à XIV **1**. Cf. les scholies 44 et 49. Cette dernière évoque le « Porisme » à XIV **1**.
296 EB + ΒΓ : EH :: BE : EZ (:: 2 : 1), donc, par permutation, EB + ΒΓ : BE :: EH : EZ.
Or SEMR (EB + ΒΓ) → s_1 = BE ; donc SEMR(EH) → s_1 = EZ. C'est en substance l'explication que donnent les scholies 45 et 49. On présuppose donc le Lemme SEMR.
297 D'après *Él.* XIII 17 Porisme. Cf. les scholies 46 et 49. Dans cette dernière, le renvoi livresque est explicite.
298 D'après le Lemme SEMR.
299 D'après *Él.* VI 16. Renvoi livresque explicite dans la scholie 49.
300 D'après *Él.* VI 1 comme le suggère les scholies 47 et 49.
301 D'après la dernière partie du Lemme XIV **2/3**, comme le relèvent les scholies 48 et 49. À cet égard, le texte grec est plutôt concis. On s'attendrait aussi à ce que l'identification des lignes Θ, ΓΔ soit rappelée, comme dans une partie de la tradition indirecte médiévale. Cf. *infra,* Tableau 4 de l'Annexe, notes 120, 123. Comme nous l'avons signalé au fur et à mesure, la scholie 49 reformule la totalité de la partie "démonstration" de XIV **3**, en identifiant tous les résultats utilisés par des références livresques.



<7> = [Lemme 3/3*aliter*]

Et démontrer autrement que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi [est] le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre, après avoir préalablement établi ceci.

Soit un cercle ABΓ, et que dans le cercle ABΓ soient inscrits AB, AΓ, côtés d'un pentagone équilatéral, et que BΓ soit jointe, et que soit pris le centre du cercle, Δ, et qu'à partir de A jusqu'à Δ soit jointe AΔ et que ΔE prolonge la droite AΔ en alignement, et que soit placée, d'une part ΔZ la moitié de AΔ[302], que d'autre part HΓ soit trois fois ΓΘ.

Je dis que le rectangle contenu par AZ, BΘ est égal au pentagone.

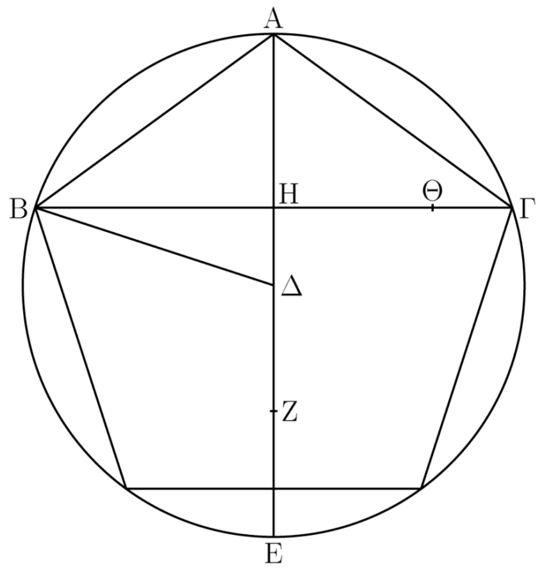
En effet qu'à partir de B jusqu'à Δ soit jointe BΔ.

Puisque AΔ est deux fois ΔZ, donc AZ est hémiole de AΔ. Ensuite puisque HΓ est trois fois ΓΘ, deux fois ΘΓ est HΘ. Donc HΓ est hémiole de ΘH. Donc comme ZA [est] relativement à AΔ, ainsi est ΓH relativement à HΘ. Le rectangle contenu par ZA, HΘ est donc égal à celui contenu par AΔ, ΓH. Or ΓH est égale à HB[303]. Celui contenu par AΔ, HB est donc égal à celui contenu par ZA, HΘ. Mais celui contenu par AΔ, HB est deux triangles ABΔ[304]. Et donc celui contenu par ZA, HΘ est deux triangles ABΔ. De sorte aussi que cinq [rectangles contenus] par AZ, HΘ sont donc dix triangles. Or dix triangles sont deux pentagones. Cinq [rectangles contenus] par AZ, HΘ sont donc égaux à deux pentagones. Puis donc que HΘ est deux fois ΘΓ, le [rectangle contenu] par AZ, HΘ est deux fois celui contenu par AZ, ΘΓ[305]. Deux [rectangles] contenus par ZA, ΘΓ sont donc égaux à celui contenu par AZ, HΘ. Et dix [rectangles] contenus par AZ, ΘΓ sont donc égaux à cinq contenus par AZ, HΘ, c'est à dire deux pentagones. De sorte que cinq contenus par AZ, ΘΓ sont égaux à un seul pentagone. Or cinq fois ceux contenus par

---

[302] On attend plutôt que ΔZ soit dite moitié de ΔE ou que ΔA, comme dans XIV **3***aliter,* soit double de ΔZ.
[303] Par la conjonction de *Él.* III 27 et I 4, comme l'explique la scholie 50.
[304] D'après *Él.* I 41. Cf. scholie 51.
[305] Cas très particulier de *Él.* VI 1 que détaille la scholie 52.

AZ, ΘΓ sont égaux à celui contenu par AZ, BΘ, puisque BΘ est quintuple de ΘΓ et que AZ est hauteur commune[306]. Le rectangle contenu par AZ, BΘ est donc égal à un seul pentagone.



<8> = [Proposition 3 *aliter*]

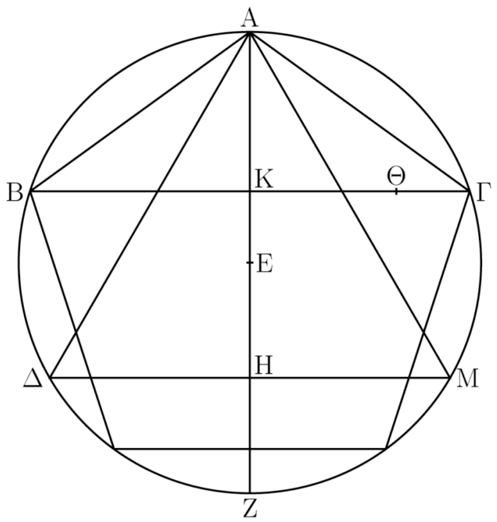
Cela étant clair, que soit maintenant proposé le cercle comprenant à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère, ABΓ. Et que dans le cercle ABΓ soient inscrits BA, AΓ, côtés du pentagone équilatéral et que BΓ soit jointe. Et que soit pris le centre du cercle E et qu'à partir de A jusqu'à E soit jointe AE et qu'elle soit prolongée vers Z et que AE soit deux fois EH; que KΓ soit trois fois ΘΓ, et qu'à partir de H soit menée HM à angles droits avec AZ, et que HΔ prolonge HM en alignement. ΔM est donc le [côté] d'un triangle équilatéral.
Que soient jointes AΔ, AM. Le triangle AΔM est donc équilatéral[307].

[306] Explication paraphrastique dans la scholie 53.

[307] Cette propriété est censée découler de la construction de ΔM ; elle repose :
- sur le fait que l'égalité mentionnée dans l'ajout à la Proposition XIV **1** (déduite de XIII 12 et mise en œuvre dans ladite construction) montre que ΔM est donnée de longueur (et donc égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ABΓ) ;
- sur la symétrie axiale de la figure par rapport à AZ , ce qui entraîne l'égalité des arcs (resp. des cordes) AΔ, AM.

Contrairement à ce que suggère la scholie 55, la seule donnée de ΔM en grandeur ne suffit pas, car un triangle construit sur la même base à partir d'un point de la circonférence autre que A possède aussi cette propriété, sans être équilatéral. La scholie 54 prend davantage de précaution (elle établit l'égalité des arcs AΔ, AM), mais elle est inutilement détaillée et esquisse inutilement un raisonnement indirect.
Une branche de la tradition indirecte médiévale — celle de la famille Téhéran 3586 — résout le problème autrement grâce à une construction alternative, le triangle étant décrit d'emblée comme le triangle de l'icosaèdre. Voir *infra,* Tableau 4 de l'ANNEXE, note 138.

Et puisque d'une part le [rectangle contenu] par AH, ΘB est égal au pentagone, d'autre part celui contenu par AH, HΔ au triangle AΔM[308], donc, comme le [rectangle contenu] par AH, ΘB [est] relativement à celui contenu par ΔH, HA, ainsi est le pentagone relativement au triangle[309]. Or comme le [rectangle contenu] par BΘ, AH, [est] relativement à celui contenu par ΔH, HA, ainsi [est] BΘ relativement à ΔH. Et donc comme douze BΘ [sont] relativement à vingt ΔH, ainsi [sont] douze pentagones relativement à vingt triangles, c'est-à-dire la surface du dodécaèdre relativement à celle de l'icosaèdre. Et d'une part douze BΘ sont dix BΓ[310]. Car, d'une part BΘ est cinq fois ΘΓ, d'autre part BΓ est six fois ΓΘ. Six BΘ sont donc égales à cinq BΓ[xxii]. Et aussi les doubles. Or vingt ΔH sont dix ΔM; car ΔM est deux fois ΔH. Donc, comme dix BΓ [sont] relativement à dix ΔM, ainsi [est] la surface du dodécaèdre relativement à la surface de l'icosaèdre. Et d'une part BΓ est le côté du cube, d'autre part ΔM celui de l'icosaèdre. Et donc, comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi [est] BΓ relativement à ΔM, c'est-à-dire le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre.



<9> = [Proposition 4]

Il faut alors démontrer aussi qu'une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison, comme [le rapport qu]'a la droite pouvant produire le carré de la droite entière plus celui sur le grand segment, relativement à la droite pouvant produire le carré de la droite entière plus celui sur le petit segment, ce même rapport, le côté du cube l'a relativement au côté de l'icosaèdre[311].

---

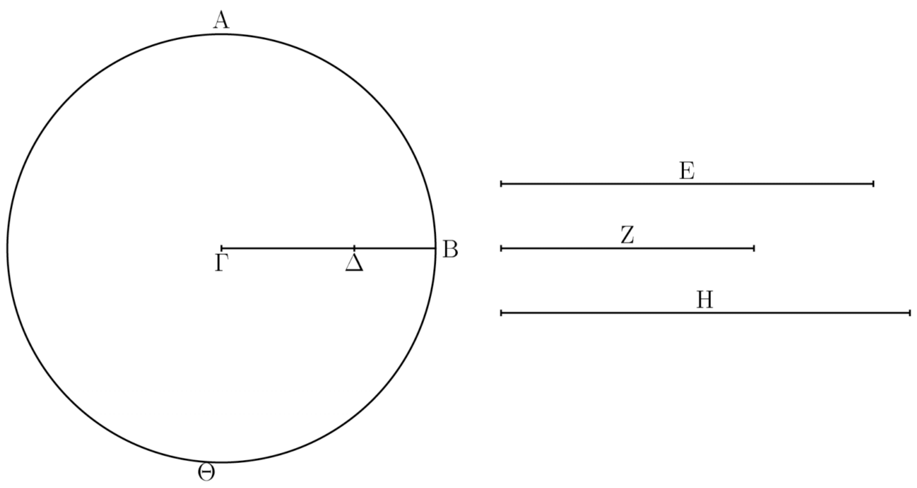
[308] Car l'un et l'autre sont doubles du triangle AΔH, comme l'expliquent les scholies 56-57.
[309] Par permutation (*Él.* V 16) du rapport d'égalité, comme l'explique la scholie 58.
[310] Explication paraphrastique dans la scholie 59.
[311] Sur cet énoncé, voir le commentaire donné *supra,* I, § 3, en particulier note 37.

Soit le cercle comprenant à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre[312], ceux qui sont inscrits dans la même sphère, AΘB, et que soit pris le centre du cercle, Γ, et qu'une certaine [droite] soit menée jusqu'à lui à partir du point Γ, au hasard, soit ΓB, et qu'elle soit coupée en extrême et moyenne raison en Δ et que son plus grand segment soit ΓΔ. ΓΔ est donc le côté du décagone inscrit dans le même cercle[313].
Que soit alors proposé E le côté de l'icosaèdre, Z celui du dodécaèdre, H celui du cube. Donc d'une part E est le côté du triangle équilatéral, d'autre part Z celui du pentagone inscrit dans le même cercle, et Z est le plus grand segment de H, celle-ci étant coupée en extrême et moyenne raison[314].
Puisque E est égal au côté du triangle équilatéral, que le côté du triangle équilatéral est, en puissance, triple de BΓ[315]{le carré sur E est donc triple de celui sur BΓ}, or il se trouve aussi que les carrés sur ΓB, BΔ sont triples de celui sur ΓΔ[316], donc, comme le carré sur E [est] relativement à celui sur ΓB, ainsi [sont] ceux sur ΓB, BΔ relativement à celui sur ΓΔ. De manière alterne, comme le carré sur E [est] relativement à ceux sur ΓB, BΔ, ainsi [est] celui sur ΓB relativement à celui sur ΓΔ. Or comme celui sur BΓ [est] relativement à celui sur ΓΔ, ainsi [est] celui sur H relativement à celui sur Z[317]. Car Z est le plus grand segment de H. Et donc, comme le carré sur E [est] relativement à ceux sur ΓB, BΔ, ainsi [est] celui sur H relativement à celui sur Z. De manière alterne et par inversion ; donc, comme le carré sur H [est] relativement à celui sur E, ainsi [est] celui sur Z relativement à ceux sur ΓB, BΔ. Or celui sur Z est égal à ceux sur BΓ, ΓΔ ; car le côté du pentagone est, en puissance, égal à la fois au côté de l'hexagone et à celui du décagone, ceux inscrits dans le même cercle[318]. Donc comme le carré sur H [est] relativement à celui sur E, ainsi [sont] ceux sur BΓ, ΓΔ relativement à ceux sur ΓB, BΔ.
Et donc, comme le carré sur H [est] relativement à celui sur E, ainsi [est] — une droite étant coupée en extrême et moyenne raison — le carré sur la droite pouvant produire[319] le carré de la droite entière et celui du grand segment relativement au carré sur la droite pouvant produire le carré de la droite entière et celui du petit segment. Et d'une part H est le côté du cube, d'autre part E est celui de l'icosaèdre.
Si une droite est coupée en extrême et moyenne raison, comme la droite pouvant produire la droite entière et le grand segment [est] relativement à la droite pouvant

---

312 D'après XIV **2**.
313 D'après la Proposition additionnelle que nous avons appelée XIII 9bis. Voir *infra,* III, § 2.
314 D'après le Porisme à *Él.* XIII 17. La droite H est aussi égale à la diagonale dudit pentagone *i.e.* la droite qui est sous-tendue par deux de ses côtés, pour parler comme dans XIV **1/2**.
315 D'après *Él.* XIII. 12.
316 D'après *Él.* XIII. 4, ce que rappelle la scholie 60.
317 Parce que chaque couple correspond à une section en extrême et moyenne raison (Lemme SEMR) ; pour (Z, H) cela résulte de *Él.* XIII 8, évoquée dans l'*EPP* qui suit. On utilise aussi *Él.* VI 22.
318 Citation non instanciée de *Él.* XIII 10 dans une explication postposée.
319 Cette curieuse expression : « τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης » — apparaît seulement dans le manuscrit ***M*** (et dans la correction de ***V*** pour l'ajout à la phrase précédente ; voir *supra* note 209). Elle pourrait être le résultat d'une correction après saut du même ; voir *infra,* note complémentaire 5.3. La scholie 62 revient à la formulation authentiquement euclidienne et souligne la signification universelle de l'énoncé (marquée par l'indéfini " οἱασδηποτοῦν "), quoique la preuve ait été menée sur BΓ.

produire la droite entière et le petit segment, ainsi donc sera le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère.



[Proposition 5]

Et il faut démontrer que comme le côté du cube [est] relativement à celui de l'icosaèdre, ainsi [est] le volume du dodécaèdre relativement au volume de l'icosaèdre[320].
En effet puisque des cercles égaux comprennent à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre[321], ceux inscrits dans la même sphère et que, dans les sphères, les cercles égaux sont à égale distance du centre, les perpendiculaires menées à partir du centre de la sphère sur les plans des cercles sont donc égales et tomberont sur les centres des cercles[322]. De sorte que les perpendiculaires menées à partir du centre de la sphère sur le centre du cercle comprenant à la fois le triangle de l'icosaèdre et le pentagone du dodécaèdre sont égales. Les pyramides ayant pour bases les pentagones du dodécaèdre et celles ayant pour bases les triangles de l'icosaèdre sont donc de hauteur égale. Or les pyramides de hauteur égale sont l'une relativement à l'autre comme leurs bases[323]. Donc, comme le pentagone [est] relativement au triangle, ainsi [est] la pyramide, celle dont d'une part la base est le pentagone, d'autre part le sommet, le centre de la sphère, relativement à la pyramide ayant d'une part le triangle comme base, d'autre part comme sommet, le centre de la sphère. Et donc, comme [sont] douze pentagones relativement à vingt triangles, ainsi [sont] douze pyramides ayant des bases pentagonales relativement à vingt pyramides ayant des bases triangulaires. Et d'une part douze pentagones, c'est la

[320] Sur cette Proposition non canonique, voir le commentaire donné *supra,* I, § 6.
[321] D'après XIV **2**.
[322] Les scholies 64-65, dans ***M***, renvoient simplement à la *petite Astronomie* (cette collection n'est pas souvent attestée et ces mentions n'ont guère été relevées dans la littérature secondaire). Celles du manuscrit ***V***, plus précises (N°66, 67) citent les *Sphériques* de Théodose. La N°66 indique même les résultats concernés.
[323] En combinant *Él.* XII 5 et l'inauthentique XII 6.

surface du dodécaèdre, d'autre part vingt triangles, la surface de l'icosaèdre. Donc, comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à celle de l'icosaèdre, ainsi [sont] 12 pyramides ayant des bases pentagonales relativement à vingt pyramides ayant des bases triangulaires. Et d'une part 12 pyramides ayant des bases pentagonales, c'est le volume du dodécaèdre, vingt pyramides ayant des bases triangulaires, le volume de l'icosaèdre. Et donc, comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à celle de l'icosaèdre, ainsi [est] le volume du dodécaèdre relativement au volume de l'icosaèdre[324]. Or il a été démontré[325] que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, [ainsi est] le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre.
Donc, comme le côté du cube [est] relativement au côté de l'icosaèdre, ainsi [est] le volume du dodécaèdre relativement au volume de l'icosaèdre.

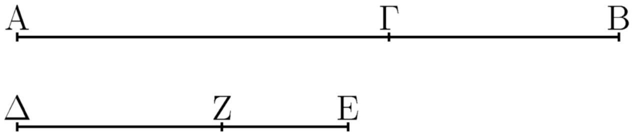
[Lemme SEMR]

Et que, si deux droites sont coupées en extrême et moyenne raison, elles sont en proportion dans la [proportion] sous-jacente[326], nous le démontrerons ainsi.
En effet que la droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison en Γ et que son plus grand segment soit AΓ. Et semblablement aussi que ΔE soit coupée en extrême et moyenne raison en Z et que son plus grand segment soit ΔZ.
Je dis que comme la droite toute entière AB est relativement à AΓ, ainsi est la droite toute entière ΔE relativement au plus grand segment ΔZ.
En effet puisque d'une part le rectangle contenu par AB, BΓ est égal au carré sur AΓ, d'autre part celui contenu par ΔE, EZ est égal au carré sur ΔZ, donc comme le rectangle contenu par AB, BΓ [est] relativement au carré sur AΓ, ainsi est celui contenu par ΔE, EZ relativement à celui sur ΔZ.
Et donc comme quatre fois le rectangle contenu par AB, BΓ [est] relativement au carré sur AΓ, ainsi [est] quatre fois celui contenu par ΔE, EZ relativement à celui sur ΔZ[327].

---

[324] C'est le résultat que la transition après la Proposition XIV **1** attribue à Apollonius.
[325] Dans XIV **3**.
[326] La Définition (*Él.* Df VI 3) de la section d'une droite, $D = s_1 + s_2$, en extrême et moyenne raison est une proportion entre une droite et deux segments qui la constituent par addition : ($D : s_1 :: s_1 : s_2$ ou $s_1 + s_2 : s_1 :: s_1 : s_2$). Cette proportion peut être transformée en une égalité surfacique par *Él.* VI 17 : Rect $(D, s_2) = (s_1)^2$. Le Lemme SEMR dit que le rapport caractéristique de cette section est indépendant de la droite considérée. Pour un Moderne qui identifie rapport et nombre réel [en l'occurrence, $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$], cela va de soi.
Les exégètes anciens ont estimé qu'il y avait là quelque chose à démontrer, $D : s_1 :: D' : s'_1$, où $D' = s'_1 + s'_2$, est une autre droite coupée en extrême et moyenne raison (on en déduit immédiatement $D : s_2 :: D' : s'_2$). C'est ce qu'explicite le diorisme. À première vue, l'énoncé lui-même est un peu étrange et le lien avec ce qui est démontré réside dans les explications que nous venons de rappeler, d'où la formulation retenue ici en termes de proportion (ἐν ἀναλογίᾳ εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ). Elle coïncide avec celle que l'on trouve dans la scholie 31 et dans la Proposition V 44 de Pappus (428.5-6 Hultsch). Comparé avec l'énoncé de la *Collectio,* celui de notre Lemme [« Ὅτι δὲ » (Καὶ τὰ ἑξῆς ὅτι δέ, ***PBVv***), « δείξομεν οὕτως »)] souligne son caractère postposé vis-à-vis des trois Propositions fondamentales du Livre XIV (**2**, **3**, **4**) dans lesquelles il est présupposé. L'énoncé est très différent dans une branche de la tradition indirecte médiévale arabe et arabo-latine ; voir *infra,* Tableau 4 de l'ANNEXE.
[327] D'après *Él.* V 15.

Et par composition, comme quatre fois le rectangle contenu par AB, ΒΓ avec le carré sur ΑΓ [est] relativement au carré sur ΑΓ, ainsi [est] quatre fois celui contenu par ΔΕ, ΕΖ avec celui sur ΔΖ relativement à celui sur ΔΖ[328].
De sorte aussi que comme le carré sur AB, ΒΓ, les deux ensemble, [est] relativement au carré sur ΑΓ, ainsi [est] le carré sur ΔΕ, ΕΖ, les deux ensemble, relativement au carré sur ΔΖ[329].
Et, en longueur, comme [sont] AB, ΒΓ, les deux ensemble, avec ΑΓ — c'est-à-dire deux AB[330] — relativement à ΑΓ, ainsi [sont] ΔΕ, ΕΖ, les deux ensemble, avec ΔΖ — c'est-à-dire deux ΔΕ — relativement à ΔΖ.
Les moitiés aussi : comme [est] AB relativement à ΑΓ, ainsi [est] ΔΕ relativement à ΔΖ[331].



[Récapitulations N°1]

Et qu'une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison, ce [rapport] que la droite pouvant produire le carré de la droite entière et celui sur le grand segment relativement à la droite pouvant produire le carré de la droite entière et celui sur le petit segment, ce même [rapport], le côté du cube l'a relativement au côté de l'icosaèdre[332].
Or il a aussi été démontré ceci : que, comme le côté du cube [est] relativement au côté de l'icosaèdre, ainsi [est] la surface du dodécaèdre relativement à la surface de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère[333],
et il a aussi été ajouté ceci : que, comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, [ainsi] aussi [est] le dodécaèdre lui-même relativement à

---

328 D'après *Él.* V 18.
329 D'après *Él.* II 8, comme le précisent les scholies 67-68.
330 Justification dans la scholie 69. Le texte de ***M*** a peut-être subi un saut du même au même qui a provoqué une petite lacune si on le compare avec les versions ***PBVv*** et Pappus, mais cette lacune n'empêche pas la compréhension de la Proposition ; voir *infra,* note complémentaire 5.4.
331 D'après *Él.* V 15, comme le rappelle la scholie 70. La fin du lemme est quelque peu abrupte (mais elle correspond au diorisme). Pappus V 44 y ajoute une sorte de Porisme (430.1-6 Hultsch) : « Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι, ἐὰν ὦσιν δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ὡς αἱ AB ΔΕ, καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ κατὰ τὰ Γ Ζ, ἔσται τὰ μείζονα τμήματα αὐτῶν ἴσα καὶ τὰ ἐλάσσονα ὁμοίως ἴσα. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἐδείχθη, ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ· » (À partir de ceci, il est alors évident que si deux droites, telles AB, ΔΕ, sont égales et que chacune des deux est coupée en extrême et moyenne raison selon les points Γ, Ζ, leurs grands segments seront égaux, et, semblablement, leurs petits segments seront égaux, puisque, en effet, comme cela a été démontré, comme AB est relativement à ΑΓ, ainsi est ΔΕ relativement à ΖΔ, et de manière alterne). Hultsch en suspecte l'authenticité.
332 C'est XIV **4**.
333 C'est XIV **3**.

l'icosaèdre[334] à cause du fait qu'à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre sont compris par le même cercle[335], il est évident que si, dans la même sphère, sont inscrits un dodécaèdre et un icosaèdre, ils auront comme rapport, celui qu'a — une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison—, la droite pouvant produire le carré de la droite entière et celui sur le grand segment relativement à la droite pouvant produire le carré de la droite entière et celui sur le petit segment.

[Récapitulations N°2]

Alors toutes ces choses nous étant maintenant connues, il est évident que si, dans la même sphère, sont inscrits un dodécaèdre et un icosaèdre, le dodécaèdre, relativement à l'icosaèdre, aura comme rapport celui qu'a — une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison —, la droite égale, en puissance, à la droite entière et au grand segment relativement à la droite égale, en puissance, à la droite entière et au petit segment[336].

Puisqu'en effet comme le dodécaèdre [est] relativement à l'icosaèdre, ainsi est la surface du dodécaèdre relativement à la surface de l'icosaèdre, c'est-à-dire le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre[337], et que, comme le côté du cube [est] relativement au côté de l'icosaèdre, ainsi [est] — une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison —, la droite égale, en puissance, à la droite entière et au grand segment relativement à la droite égale, en puissance, à la droite entière et au petit segment, donc, comme le dodécaèdre [est] relativement à l'icosaèdre — ceux inscrits dans la même sphère — [ainsi est] — une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison —, la droite égale, en puissance, à la droite entière et au grand segment relativement à la droite égale, en puissance, à la droite entière et au petit segment.

FIN DU LIVRE XIV

---

334 C'est le résultat attribué à Apollonius qui n'est l'objet explicite d'aucune Proposition du Livre XIV mais dont l'obtention constitue la plus grande partie de XIV **5**.

335 C'est XIV **2** (résultat attribué à Aristée).

336 Cette assertion duplique pratiquement l'assertion finale des premières récapitulations. À noter cependant que la formulation de la "puissance" (« ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ ... τμῆμα ») utilisée à six reprises dans ces secondes récapitulations est différente de celle que l'on trouve dans les premières, dans laquelle "δυναμένη" est utilisée pour désigner une droite qui a puissance sur une *aire*, conformément à l'usage euclidien (*Él.* Df. X 4) et non, comme ici, pour exprimer une égalité, en puissance, entre lignes (dans ce cas, Euclide utilise le verbe δύνασθαι).

337 Parce que cette incise (qui indique le résultat de XIV **3**) manque dans la famille ***PBVv***, la scholie 71 (dans ***V***) rappelle ce résultat.

4. Texte grec et traduction des scholies au Livre XIV

Le lecteur trouvera ici les textes des scholies qui se trouvent, pour le Livre XIV, dans trois des cinq manuscrits de base[338] :

P Cod. *Vatican. Gr.* 190, IX^{e} s.

M Cod. *Monac. Gr.* 427, XIII^{e} s pour cette portion.

V Cod. *Vindobon. Philos. Gr.* 103, XII^{e} s.

Celles de ***M, V*** ont été édités par Heiberg[339]. Pour les annotations de ***V,*** il distingue deux mains (***V***^{1}, ***V***^{2}), tandis que celles de ***M*** sont par la première main. Heiberg ajoute que les nombreuses erreurs (en particulier celles qui résultent d'abréviations) indiquent que les scholies de ***M,*** contrairement à celles de ***V,*** n'ont pas été élaborées par le copiste lui-même, mais ont été reprises à partir d'un modèle. Elles sont donc probablement anciennes. Nous avons réuni les deux collections en une seule, et leur avons adjoint les six annotations de ***P*** sur XIV **1**, en fonction de leur point d'insertion dans le texte du Livre XIV, soit un corpus de 71 scholies, qui se répartissent comme suit :

	Préf.	**XIV 1**	**XIV 1+**	**1→2**	**XIV 1/2**	**XIV 2**	**XIV 2/3<a>**	**XIV 2/3<b>**	**XIV 3**
P	**0**	**6**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
M	**0**	**4**	**1**	**0**	**2**	**6**	**2**	**0**	**8**
V	**0**	**7**	**1**	**0**	**1**	**7**	**1**	**2**	**1**
Total	**0**	**17**	**2**	**0**	**3**	**13**	**3**	**2**	**9**

	3/3*aliter*	**3*aliter***	**XIV 4**	**XIV 5**	**SEMR**	**Réc. 1**	**Réc. 2**	**Total**
M	**2**	**2**	**2**	**2**	**1**	**0**	**0**	**32**
V	**2**	**4**	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**33**
Total	**4**	**6**	**3**	**4**	**4**	**0**	**1**	**71**

L'ordre ainsi induit sur chaque sous-collection ne correspond pas avec celui de leurs éditions par Heiberg, pour lesquelles il a sans doute procédé marge par marge. Une table de correspondance est donnée à la suite des textes et traductions.

[338] Le manuscrit ***v*** ne contient aucune scholie dans le Livre XIV. Les quelques références livresques marginales de ***B*** (cf. *supra,* § 1) n'ajoutent aucune information par rapport aux scholies de ***MV*** ; ce n'est pas tout-à-fait le cas de celles de ***P,*** ce qui justifie un traitement différent. D'autres codices possèdent aussi quelques scholies dans le Livre XIV qui proviennent de ***V,*** notamment les *Savil.* 13 et *Cantabrig. Gg II 33* (XVI^{e} s.) ; voir [Heiberg, 1903], p. 333. Une abondante collection d'annotations (une soixantaine) se trouve aussi en marge du Livre XIV dans le Flor. Laur. Plut. 28.06 (XIII^{e}-XIV^{e} s.), ff° 285^{v}-292^{v}.

[339] Pour les scholies de ***V,*** édition dans *EHM,* V, *Appendix scholiorum* I, 679-688 = *EHS,* V, 2, 311-318 ; pour les scholies de ***M,*** édition dans [Heiberg, 1903], pp. 328-333.

Ad Prop. **1**

1 (***P***) λέγω ... τῆς τοῦ ἑξαγώνου *EHS,* V, 1, 2.21-22 = 90.5-6][340], f° 283^{r}, mg ext., m. 1 :

ἡ γὰρ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση δέδεικται τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Car le côté de l'hexagone a été démontré égal au rayon du cercle.

2 (***M***) καὶ κείσθω τῇ EZ, *EHS,* V, 1, 2.24 = 90.8] (cf. N°3) :

Δῆλον γὰρ, ὅτι ἡ ΔE τῆς EZ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔE (lire ΔΓ) τῆς ΓZ μείζων · ἡ μὲν γὰρ ΔΓ τριγώνου (lire ἑξαγώνου), ἡ δὲ ΓZ τετραγώνου (lire δεκαγώνου) · δῆλον, ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ τῶν ΔE, EΓ τῶν ἀπὸ ZE, EΓ μεῖζον. Κοινὸν ἤρθω τὸ ἀπὸ τῆς EΓ · λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔE τοῦ ἀπὸ τῆς EZ μεῖζον · ὥστε ἡ ΔE τῆς EZ μείζων.

En effet, il est évident que ΔE est plus grande que EZ. En effet, puisque ΔΓ est plus grande que ΓZ — car d'une part ΔΓ est un côté de l'hexagone, d'autre part ΓZ, du décagone —, il est évident que les carrés sur ΔE, EΓ sont plus grands que ceux sur ZE, EΓ. Que celui sur EΓ soit soustrait de part et d'autre ; ce qui reste, celui sur ΔE, est donc plus grand que celui sur EZ ; de sorte que ΔE est plus grande que EZ.

3 (***V***^{1}) καὶ κείσθω τῇ EZ, *EHS,* V, 1, 2.24 = 90.8] (cf. N°2) :

ἡ γὰρ ΔE μείζων τῆς EZ. ὅτι δὲ μείζων ἡ ΔE τῆς EZ, δῆλον ἐκ τοῦ δύνασθαι τὴν μὲν ΔΓ ἑξαγώνου πλευρὰν οὖσαν τὰ ἀπὸ τῶν ΔE, EΓ, τὴν δὲ ZΓ δεκαγώνου οὖσαν τὰ ἀπὸ τῶν ZE, EΓ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΓ μείζων τῆς ZΓ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔE, EΓ μείζονά εἰσι τῶν ἀπὸ τῶν ZE, EΓ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ τῆς EΓ μεῖζον τὸ ἀπὸ τῆς ΔE τοῦ ἀπὸ τῆς EZ· ὥστε καὶ ἡ ΔE τῆς EZ μείζων ἐστίν.

Car ΔE est plus grande que EZ. Et que ΔE soit plus grande que EZ, c’est évident à partir du fait que, d’une part ΔΓ, étant le côté d’un hexagone, peut produire les carrés sur ΔE, EΓ, d’autre part ZΓ, étant celui du décagone, peut produire ceux sur ZE, EΓ. Puis donc que ΔΓ est plus grande que ZΓ, ceux sur ΔE, EΓ sont aussi plus grands que ceux sur ZE, EΓ et celui sur EΓ étant retranché de part et d’autre, celui sur ΔE est plus grand que celui sur EZ. De sorte aussi que ΔE est plus grande que EZ.

4 (***M***) τῆς δὲ BZΓ ἡμίσεια ἡ ZΓ, *EHS,* V, 1, 3.4 = 90.12] :

ἐὰν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου [οὐκ] εὐθεῖ<αν τ>ινα μὴ <διὰ του> κ<έντρου> π<ρὸς ὀρθ>ὰς τέμνῃ, καὶ

Si une certaine droite, passant par le centre, coupe à angles droits une certaine droite, ne passant par le centre, elle coupe aussi l'arc en

[340] Pour chaque scholie, nous indiquons le manuscrit dans lequel elle se trouve, le passage du texte du Livre XIV auquel elle se rapporte quand celui est identifié, d'abord dans la pagination de Heiberg (*EHS*), puis dans la nôtre. Nous précisons aussi l'endroit d'insertion (mg = marge ; ext. = extérieure ; inf. = inférieure) pour les six scholies inédites de ***P*** et l'"identité" de la main (= m.) qui l'a écrite.

τὴν <περιφέρειαν δίχα> τέμνῃ (lire τέμνει). ἔστω ἡ BE τῇ EΓ ἴση. ἐὰν οὖν ἐπιζεύξω τὴν BZ, εὑρεθήσεται ἡ B<Z περι]φέρεια τῇ BΓ (lire ZΓ) ἴση · ὥστε ἡ BZ<Γ> τῆς BΓ (lire ZΓ) διπλῆ.	deux [parties égales]. Que BE soit égale à EΓ. Alors si je joins BZ, l'arc BZ sera trouvé égal à l'arc ZΓ ; de sorte que l'arc BZΓ est double de l'arc ZΓ.

5 (***P***) καὶ ἡ AΓZ ἄρα περιφέρεια, *EHS,* V, 1, 3.5 = 90.12] f° 283^{r}, mg ext., m. 1 (cf. N°6-7) :

τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίαι (lire -σίοις) τὸν αὐτὸν λόγον ἕξει.	Car les parties auront le même rapport que leurs mêmes multiples.

6 (***P***) καὶ ἡ AΓZ ἄρα περιφέρεια, *EHS,* V, 1, 3.5 = 90.12], f° 283^{r}, mg ext., m. 2 (cf. N°5, 7) :

εἰ γάρ ἐστι καθ᾽ ὑπόθεσιν ὅλη ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἴη κ¦ ἡ δὲ BZΓ δ¦, πενταπλα<σίονα> ἔχει λόγον, εἰ γοῦν τὴν ὅλην περιφέρειαν τέμῃς εἰς <΄ ἤτοι δέκα καὶ πάλιν τὴν BZΓ περιφέρειαν εἰς <΄ ἤτοι τὰ δ¦ εἰς δύο, εὑρίσκεται ὁ ι¦ πενταπλα<σίων> τοῦ β¦ καὶ ἔχουσι τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν λόγον.	Car si, par hypothèse, la circonférence tout entière du cercle était de 20), ayant un rapport quintuple, l'arc BZΓ [serait] 4, si donc, tu coupais la circonférence tout entière en deux [parties égales], soit 10, et à nouveau, l'arc BZΓ en deux [parties égales], soit 4, on trouve que 10 est quintuple de 2 et que les parties ont le même rapport que leurs mêmes multiples.

7 (***V***^{2}) καὶ ἡ AΓZ ἄρα περιφέρεια, *EHS,* V, 1, 3.5 = 90.12] (cf. N°5-6) :

ὡς τὸ ὅλον πρὸς τὸ ὅλον, οὕτως καὶ τὸ ἥμισυ πρὸς τὸ ἥμισυ.	Comme le tout est relativement au tout, ainsi est la moitié relativement à la moitié.

8 (***P***) τετραπλῆ ἄρα ..., *EHS,* V, 1, 3.6 = 90.13], f° 283^{r}, mg inf., m. 2 :

εἰ γὰρ ἡ ἡμίσεια περιφέρεια ἤτοι ἡ AΓZ ἦν ὡς εἴπομεν δέκα ἡ δὲ ZΓ δύο καὶ οὕτως ἦν πενταπλα(σίων) εἰ ἀφαιρήσῃς ἀπὸ τῆς ὅλης τῆς AΓZ οὔσης δέκα τὴν AΓ ἔσται ὀκτὼ καὶ ἐναπέμεινεν ἡ ΓZ δύο ὥστε τὰ ὀκτὼ τοῦ δύο τετραπλα(σίονα) εἰσίν.	Si, en effet, la circonférence moitié, soit AΓZ, était dix, comme nous l'avons dit, l'arc ZΓ, deux, et, de cette manière, était quintuple, si tu le retranchais à partir du tout AΓZ, qui est dix, l'arc AΓ sera huit et il reste l'arc ΓZ deux, de sorte que huit est quadruple de deux.

9 (***P***) ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΖΓ, *EHS,* V, 1, 3.6-7 = 90.13], f° 283^{r}, entre les 4^{e} et 3^{e} lignes avant la fin de la colonne 2, m. 2 (cf. N°10) :

ὡς γὰρ αἱ ὑποτείνουσαι τὰς γωνίας περιφέρειαι οὕτως καὶ αἱ γωνίαι.

Car, comme sont les arcs qui sous-tendent les angles, ainsi [sont] aussi les angles.

10 (***V***^{2}) ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΖΓ, *EHS,* V, 1, 3.6-7 = 90.13] (cf. N°9) :

διὰ τὸ λγ´ τοῦ ἕκτου τὸ λέγον· ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασι.

Grâce au 33^{e} théorème du sixième Livre, qui dit : « dans les cercles égaux, les angles ont le même rapport que les arcs sur lesquels ils s'appuient ».

11 (***M***) διπλῆ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΕΖΓ, *EHS,* V, 1, 3.8-9 = 90.15] (cf. N°12) :

ὅτι ἡ ΔΖ τῇ ΔΓ ἴση, ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ. καὶ ἐστι ταῖς δύο ἴση ἡ ὑπὸ ΑΔ<Γ · ἡ> ὑπὸ ΑΔΓ ἄρα <δι>πλῆ τῆς ὑπὸ <Ε>Ζ<Γ>.

Parce que ΔΖ est égale à ΔΓ, l'angle sous ΕΖΓ est égal à celui sous ΔΓΖ. Et celui sous ΑΔΓ est égal aux deux ; celui sous ΑΔΓ est donc double de celui sous ΕΖΓ.

12 (***V***^{2}) διπλῆ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΕΖΓ, *EHS,* V, 1, 3.8-9 = 90.15] (cf. N°11) :

διὰ τὸ εἶναι τὸ ΖΔΓ τρίγωνον ἰσοσκελές· ἐπεὶ δὲ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, αὗται δὲ ἴσαι αἱ πρὸς τῷ Ζ καὶ Γ, διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς πρὸς τῷ Ζ γωνίας.

À cause du fait que le triangle ΖΔΓ est isocèle ; et puisque de tout triangle, l'angle extérieur est égal aux angles intérieurs et opposés, et que ceux en Ζ et Γ sont égaux, celui sous ΑΔΓ est double de l'angle au point Ζ.

13 (***V***^{2}) διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ τῆς ὑπὸ ΗΔΓ, *EHS,* V, 1, 3.9-10 = 90.15-16] :

διὰ τὸ τὰ ὑποδιπλάσιά τινος διπλάσια εἶναι τοῦ ὑποτετραπλασίου ἐκείνου.

À cause du fait que les sous-doubles de quelque chose sont doubles des sous-quadruples de celle-ci.

14 (***M***) ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΗΓ, *EHS,* V, 1, 3.10 = 90.16] (cf. N°15) :

<ἐπ>εὶ γὰρ ἴση ἡ <ΗΕ> τῇ ΕΖ, κοινὴ δε ἡ ΕΓ, ἀλλὰ καὶ γωνία <ἡ ὑπὸ ΗΕΓ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ> ἴση · ὀρθαὶ γὰρ · <καὶ> βάσις ἄρα ἡ ΓΖ βάσει τῇ ΓΗ ἴση · ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΖΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΗΓ.

En effet, puisque ΗΕ est égale à ΕΖ, que ΕΓ est commune, mais aussi que l'angle sous ΗΕΓ est égal à celui sous ΓΕΖ — car ils sont droits — ; la base ΓΖ est donc aussi égale à la base ΓΗ, de sorte que l'angle sous ΕΖΓ est égal à celui sous ΕΗΓ.

15 (***V^2***) ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΗΓ, *EHS,* V, 1, 3.10 = 90.16] (cf. N°14) :

δύο γὰρ τρίγωνα τὰ ΗΓΕ, ΕΓΖ τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχει καὶ τὰς πρὸς τῷ Ε γωνίας ἴσας· ὀρθαὶ γάρ· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει ἤτοι τὴν ΗΓ τῇ ΓΖ καὶ τὰς γωνίας τὰς πρὸς τῷ Η καὶ Ζ ἴσας, ὑφ ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι.

Car deux triangles, ΗΓΕ, ΕΓΖ, ont deux côtés égaux à deux côtés et les angles au point Ε égaux ; car ils sont droits ; et ils auront la base égale à la base, soit ΗΓ à ΓΖ, et les angles aux points Η et Ζ égaux, ceux que les côtés égaux sous-tendent.

16 (***V^2***) ἴση ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΗΓ, *EHS,* V, 1, 3.11-12 = 90.17] :

τριγώνου γὰρ τοῦ ΗΔΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΕΗΓ, καί ἐστιν ἴση δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἤτοι ταῖς πρὸς τῷ Δ καὶ Γ. ἔστι δὲ τῆς πρὸς τῷ Δ διπλῆ· καὶ τῆς πρὸς τῷ Γ ἄρα. ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Δ τῇ πρὸς τῷ Γ· ἴση ἄρα ἡ ΔΗ πλευρὰ τῇ ΗΓ.

Car l'angle sous ΕΗΓ est extérieur au triangle ΗΔΓ, et il est égal aux deux intérieurs et opposés, soit ceux aux points Δ et Γ. Or il est double de celui au point Δ ; et donc de celui au point Γ. Celui au point Δ est donc égal à celui au point Γ; le côté ΔΗ est donc égal à ΗΓ.

17 (***P***), f° 283^v, mg ext., m. 2[341] :

καθ' ὑπόθεσιν διασαφήται

Par hypothèse, que cela soit rendu clair [ainsi].

18 (***M***) Φανερὸν δὴ ... κέντρου τοῦ κύκλου, *EHS,* V, 1, 3.19–4.3 = 91.3-5] (cf. N°19) :

τοῦ ιβ´ λέγει θεωρήματος τοῦ ιγ´ βιβλίου · ὡς γὰρ ἀπὸ τῆς κατασκευῆς ἐκείνου δυνα<τὸν> τοῦτο δειχθῆναι. ἐκκείσ<θω ἡ> κατασκευὴ τοῦ δωδεκάτου θεωρήματος, ὥς ἐστιν ἐκεῖ ἐν τῷ ιγ´ βιβλίῳ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. ἐπεὶ ἡ ΔΒ <τῇ ΒΕ ἴση ἐστίν · > ἑξαγώνου <γὰρ πλευραὶ ἀμ>φότεραι · ἴσα καὶ τὸ (lire τὰ) ἀπὸ τῶν ΔΚ, ΚΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΚ, ΚΒ. Κοινὸν ἤρθ<ω> τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ · ἡ ΔΚ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση. ὥστε

Il veut dire le 12^e théorème du 13^e Livre. En effet, afin qu'il soit possible que ceci soit démontré à partir de cette construction-là, que soit proposée la construction du douzième théorème telle qu'elle se trouve dans le 13^e Livre. Et que ΔΒ soit jointe. Puisque ΔΒ est égale à ΒΕ — car l'une et l'autre sont côtés d'un hexagone — les carrés sur ΔΚ, ΚΒ sont aussi égaux à ceux sur ΕΚ, ΚΒ. Que celui sur ΚΒ soit soustrait de part et d'autre ; donc ΔΚ est égale à ΕΚ. De sorte que ΔΚ, laquelle est perpendiculaire sur ΒΓ, côté du triangle, est

[341] Cette scholie est associée à un diagramme qui reproduit lui–même partiellement (et mal) celui de la Proposition : les droites ΔΗΕΖ, ΖΓ sont tracées perpendiculaires (!) et des nombres sont placés sur elles,: ΔΗ, 90 ; ΗΕ = ΕΖ, 50 ; ΖΓ, 90. On a donc bien DE = 140 = (190 + 90)/2] comme l'établit la Proposition. Mais les nombres assignés ne vérifient pas les proportions imposées par la configuration géométrique].

ἡ ΔΚ ἥτις κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΒΓ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου, <ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου · ἔστι> γὰρ ἡμίσ<εια> τῆς ΔΕ.

une moitié du rayon ; car elle est moitié de ΔE.

19 ($\boldsymbol{V}^2$) Φανερὸν δὴ ... κέντρου τοῦ κύκλου, *EHS,* V, 1, 3.19–4.3 = 91.3-5] (cf. N°18) :

Ἐπεὶ γὰρ κάθετος ὑπόκειται ἡ ΔΖ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ΑΖ ἄρα ἐκβληθεῖσα ἐπὶ τὸ Ε ὀρθὰς ποιήσει καὶ τὰς ὑπὸ ΒΖΕ, ΓΖΕ· ἐὰν γὰρ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ Ε· ἰσοσκελὲς γὰρ τὸ ΔΒΕ τρίγωνον διὰ τὸ ἑξαγώνου πλευρὰν εἶναι τὴν ΒΕ, ἴσην δὲ εἶναι ταύτῃ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τὴν ΔΒ. δύο δὴ τρίγωνα τὰ ΔΒΖ, ΖΒΕ ἰσογώνιά εἰσιν· ἀνάλογον ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΖ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ. ἴσαι δὲ αἱ ΔΒ, ΒΕ· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ΔΖ, ΖΕ. ἡ ΔΕ ἄρα διπλῆ τῆς ΔΖ.

En effet, puisque ΔZ est supposée perpendiculaire à BΓ, la droite AZ prolongée vers E produira donc aussi des angles droits sous BZE, ΓZE ; en effet si deux droites se coupent l'une l'autre, elles produisent des angles opposés par le sommet qui sont égaux les uns aux autres. Or l'angle au point Δ est égal à celui au point E ; car le triangle ΔBE est isocèle à cause du fait que BE est côté d'un hexagone, et qu'à celui-ci est égal le rayon ΔB. Alors deux triangles, ΔBZ, ZBE, sont équiangles ; en proportion donc, comme BΔ est relativement à ΔZ, ainsi est BE relativement à EZ. Or ΔB, BE sont égales ; ΔZ, ZE sont donc aussi égales. ΔE est donc double de ΔZ.

Ad Lemma **1/2**

20 (***M***) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, *EHS,* V, 1, 5.2 = 92.8 (?)] :

ἡ γὰρ ΒΑ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτείνει. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΑ (lire BAE) <περι>φέρεια τῇ <Β>Γ (lire BΓE) ἴση, ὧν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑ περιφ<έρεια> λοιπῇ τῇ Β<Γ ἴση ·> ὥστε ἡ Β<Α> περιφέρεια δύο εὐθεία<ς> πενταγώνου δέχεται. ὥστε ἡ ΒΑ εὐθεῖα ταῖς δύο πλευραῖς τοῦ πενταγώνου ὑποτείνει.

En effet, BA est sous-tendue par deux côtés du pentagone. En effet, puisque l'arc BAE est égal à BΓE, dont [la partie] AE est égale à EΓ, l'arc restant BA est égal à l'arc restant, BΓ ; de sorte que l'arc BA reçoit deux droites du pentagone. De sorte que la droite BA sous-tend les deux côtés du pentagone.

21 ($\boldsymbol{V}^2$) τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑΕ, *EHS,* V, 1, 5.10-11 = 92.12] :

ἡμικύκλιον γάρ ἐστι τὸ ΒΑΕ, ἡ δὲ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν

Car BAE est un demi-cercle, et l'angle dans un demi-cercle est droit, et le carré sur la droite qui sous-tend l'angle droit est τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετραγώνοις.

égal aux carrés sur les côtés autour de l’angle droit.

22 (***M***) τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ ... τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, *EHS,* V, 1, 5.14-15 = 92.14] :

ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰν καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Car le côté du pentagone peut produire le côté de l'hexagone et celui du décagone, ceux qui sont inscrits dans le même cercle.

Ad Prop. **2**

23 (***M***) κύβου ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, *EHS,* V, 1, 6.6 = 93.12] (cf. N°24) :

ἐπειδὴ γὰρ ἕκαστον πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου περὶ ἑκάστην πλευρὰν τοῦ κύβου ἐστίν, δῆλον, ὅτι ἑκάστη τοῦ κύβου πλευρὰ δύο ὑποτείνει πλευρὰς τοῦ πενταγώνου· ὥστε πᾶσα ἡ ὑποτείνουσα ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ κύβου πλευρᾷ.

En effet, puisque chaque pentagone du dodécaèdre est autour de chaque côté du cube, il est évident que chaque côté du cube sous-tend deux côtés du pentagone ; de sorte que toute droite qui est sous-tendue par deux côtés du pentagone est égale au côté du cube.

24 (***V^2***, sed del.) κύβου ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, *EHS,* V, 1, 6.6 = 93.12] (cf. N°23) :

Εὰν γὰρ ὑπὸ μίαν ἑκάστην γωνίαν τοῦ πενταγώνου ἰσογωνίου ὄντος ἀγάγωμεν εὐθείας, εὑρίσκονται ε εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις τό τε τετράγωνον δηλαδὴ καὶ τὸ ὕψος τοῦ κύβου.

En effet, si nous menons des droites, chacune étant sous-tendue par un angle d’un pentagone équiangle, 5 droites seront trouvées, à la fois égales entre elles et au côté du carré, de manière évidente, et à la hauteur du cube.

25 (***M***) τετμήσθω ἡ ΜΝ ... πέντε τοῖς ἀπὸ ΚΛ, *EHS,* V, 1, 6.12–7.7 = 93.17-23][342] :

ἐπεὶ γὰρ ἡ Μ<Ν> ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΜΞ, ἡ <ΜΞ> ἄρα δεκαγώνου ἐστὶ πλευρά. <ἐπεὶ> γὰρ ἡ ΜΝ ἐκ τοῦ <κέντρου> ἐστὶ τοῦ κύκλου, ἀφ’ <οὗ τὸ> εἰκοσάεδρον γέγραπται, ἡ <ΜΝ> ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ <τοῦ> εἰς αὐτὸν τὸν (lire τὸν αὐτὸν) κ<ύκλον> γραφομένου.

En effet, puisque MN est divisée en extrême et moyenne raison et que ΜΞ est son plus grand segment, ΜΞ est donc le côté du décagone. En effet, puisque MN est rayon du cercle sur lequel est décrit l'icosaèdre, MN est donc un côté de l'hexagone inscrit dans le même cercle.

---

342 Cette intéressante scholie porte essentiellement sur *EHS,* V, 1, 6.12–7.1 (= 93.17-18), avec une démonstration de ce que nous avons appelé XIII. 9^{bis}), puis sur *EHS,* V, 1, 7.6-7 (= 93.22-23, rappel de *Él.* XIII 10).

ἐ<ὰν> δὲ ἑξαγώνου πλευρὰ ἄκρον καὶ μέσον <λόγον> τμηθῇ, τὸ <μεῖ>ζον αὐτῆς τμῆμα <δε>καγώνου ἐστὶ πλευρὰ <τοῦ> εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τῷ ἑξαγώνῳ ἐγγραφομ<ένου>. ἔστω ἑξαγώνου π<λευρὰ> ἡ ΑΒ καὶ τετ<μή>σθω ἄκρον καὶ μ<έσον> λόγον κατὰ τὸ <Γ>, καὶ τὸ μεῖζον τμ<ῆμα> ἔστω ἡ ΑΓ. Λ<έγω,> ὅτι ἡ ΑΓ δεκα<γώνου> ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν <κύκλον> ἐγγραφομένου τ<ῷ> ἑξαγώνῳ. <Προσ>κείσθω τῇ Α<Β> δεκαγώνου π<λευ>ρὰ τοῦ εἰς <τὸν> αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομ<ένου> τῇ ΑΒ <ἡ> ΒΔ.

καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἑξ<αγώνου ἐστὶν,> ἡ δὲ ΒΔ δεκ<αγώνου> τῶν εἰς τὸν αὐτ<ὸν> κύκλον ἐγγραφομ<ένων>, ὅλη ἡ ΑΔ <ἄ>κρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, <καὶ> τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ · ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν <ΑΒ>, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ.

<ἐπεὶ> οὖν ἡ ΑΔ ἄκρον καὶ μέσον λ<όγον> τέτμηται κατὰ τὸ Β, καὶ τὸ μ<εῖζον> τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ, τέ<τμηται δὲ καὶ> ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν <ΒΑ>, <οὕ>τως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ.

ἐδείχθη δὲ, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ · ἔστιν ἄρα, <ὡς ἡ> ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ. ἡ ΒΔ ἄρα τῇ ΑΓ ἴση. ἡ δὲ ΒΔ δεκαγώνου <ἐστίν · ὥστε καὶ ἡ> ΑΓ δεκαγώνου.

ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΝ ἑξαγώνου ἐστίν, ἡ δὲ ΜΞ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων, <ἡ δὲ> τοῦ πενταγώνου δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ [δω]δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν

Et si un côté de l'hexagone est coupé en extrême et moyenne raison, son plus grand segment est un côté du décagone, celui inscrit dans le même cercle que l'hexagone.

Soit AB un côté de l'hexagone et qu'il soit coupé en extrême et moyenne raison selon le point Γ, et que son plus grand segment soit AΓ.

Je dis que AΓ est un côté du décagone inscrit dans le même cercle que l'hexagone.

Qu'un côté BΔ du décagone inscrit dans le même cercle que AB soit ajouté à AB.

Et puisque AB est côté de l'hexagone, que BΔ est celui du décagone, ceux inscrits dans le même cercle, la droite AΔ entière est divisée en extrême et moyenne raison et son plus grand segment est AB ; donc, comme AΔ est relativement à AB, ainsi est AB relativement à BΔ.

Alors, puisque AΔ est divisée en extrême et moyenne raison selon le point B et que son plus grand segment est AB, mais que AB est aussi divisée en extrême et moyenne raison selon le point Γ et que son plus grand segment est AΓ, donc, comme AΔ est relativement à BA, ainsi est AB relativement à AΓ.

Or il a été démontré que comme AΔ est relativement à AB, ainsi est AB relativement à BΔ ; donc, comme AB relativement à BΔ, ainsi est AB relativement à AΓ. Donc BΔ est égale à AΓ. Or BΔ est un côté du décagone ; de sorte aussi que AΓ est un côté du décagone.

Puis donc que MN est côté de l'hexagone, que MΞ est celui du décagone, ceux inscrits dans le même cercle, tandis que κύκλον ἐγγραφομένων ταῖς ΜΝ, ΜΞ. τὰ ἄρα πεντάκις ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ (lire ΜΞ) ἴσα εἰσὶ τῷ <π>εντάκις ἀπὸ τῆς ΚΛ.

celui du pentagone peut produire celui de l'hexagone et celui du décagone, ceux inscrits dans le même cercle que MN, ΜΞ, cinq fois les carrés sur MN, ΜΞ sont donc égaux à cinq fois celui sur ΚΛ.

26 (***V***^{2}) καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ... πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ, *EHS,* V, 1, 7.2-16 = 93.19–94.3][343] :

Ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΗ πλευρᾶς οὔσης τοῦ κύβου (ἔχει δὲ τριπλασίονα λόγον διὰ τὸ ιη´ τοῦ ιγ´ βιβλίου), οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ ΚΛΘ τριγώνου ἰσοπλεύρου, ἐξ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγράφεται, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσης τοῦ κύκλου, ἐν ᾧ τὸ τοιοῦτον ἐγγράφεται τρίγωνον, διὰ τὸ ιβ´ τοῦ ιγ´ βιβλίου· καὶ ἐναλλάξ· ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσα ε τοῖς ἀπὸ ΜΝ. ε ἄρα τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΑΒ.
πέντε οὖν τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσα ἔσονται τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΔΗ, ΗΓ.
ὅπως δὲ πέντε τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΑΒ, δῆλον· ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐκ κέντρου οὔσης τοῦ κύκλου, ᾧ ἐγγράφεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τοιούτου τριγώνου τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΝ, ἐὰν τὸ πενταπλάσιον τριπλασιασθῇ καὶ τὸ τριπλάσιον πενταπλασιασθῇ, ἰσωθήσονται.
ὅτι δὲ καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῶν ... ΔΗ καὶ ΗΓ, τῆς ὑποτεινούσης λέγω τὴν τοῦ

Comme le carré sur le diamètre de la sphère, AB, est relativement au carré sur ΔΗ, qui est le côté du cube (et il a le rapport triple d'après la 18^{e} Proposition du Livre XIII), ainsi est le carré sur le côté du triangle équilatéral ΚΛΘ, à partir duquel l'icosaèdre est décrit, relativement au carré sur MN, qui est le rayon du cercle dans lequel ce triangle-ci est inscrit[344], grâce à la 12^{e} Proposition du 13^{e} Livre) ; et aussi par permutation ; mais trois carrés sur ΔΗ sont égaux à 5 carrés sur MN. Donc 5 carrés sur ΚΛ sont égaux à trois carrés sur AB[345]. Alors cinq carrés sur ΚΛ seront égaux à trois de ceux sur ΔΗ, ΗΓ.
Et comment cinq carrés sur ΚΛ sont égaux à trois carrés sur AB, c'est évident ; en effet, puisque d'une part le carré sur AB est quintuple de celui sur MN, qui est le rayon du cercle, dans lequel est inscrit le triangle équilatéral, que, d'autre part, le carré sur le côté de ce triangle-ci est triple de celui sur MN, si le quintuple se trouve triplé et le triple se trouve quintuplé, ils se trouveront égalisés.
Et aussi que trois carrés sur … ΔΗ et ΗΓ, je veux dire la droite qui sous-tend l'angle

[343] Cette scholie paraphrase toute la portion "démonstration" de la Proposition **XIV** 2.
[344] Fatale confusion: le scholiaste confond le cercle sur lequel est construit l'icosaèdre (dont MN est le rayon) et le cercle circonscrit à la face triangulaire de l'icosaèdre : dans le second, on a donc $ΚΛ = c_3$, dans le premier $ΚΛ = c_5$!
[345] Donc l'arête de l'icosaèdre, $a_{20} = ΚΛ$, vérifie $5\ ΚΛ^2 = 3\ AB^2$, et a_{20} est donc exprimable en fonction du diamètre de la sphère AB, ce qui est difficilement compatible avec ce qu'Euclide démontre dans XIII 16.

πενταγώνου γωνίαν καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, ἴσα τρισὶ τοῖς ἀπὸ AB, δῆλον ἐντεῦθεν· δέδεικται ἐν ι´ τοῦ ιγ´ βιβλίου, ὡς ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τοῦ ἑξαγώνου καὶ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ προρρηθέντι θεωρήματι ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν τοῦ πενταγώνου γωνίαν καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ᾧ ἐγγράφεται τὸ πεντάγωνον (ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου, ὡς εἴρηται), ἴσον ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς AB καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΗ, ΗΓ· τοῦ γὰρ ἀπὸ τῆς MN πενταπλάσιον κἀκεῖνο καὶ ταῦτα. ὥστε καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς AB τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΗ, ΗΓ ἴσα. τρισὶ δὲ τοῖς ἀπὸ τῆς AB πέντε τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσα· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΗ, ΗΓ ἴσα.

καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

du pentagone et le côté du pentagone, égaux à trois carrés sur AB, c'est évident par ce qui suit : il est démontré, dans la 10e Proposition du 13e Livre, que le côté du pentagone peut produire ceux d'un hexagone et d'un décagone inscrits dans le même cercle. Puis donc que, dans le théorème énoncé précédemment, il a été démontré que le carré sur la droite qui sous-tend l'angle du pentagone et [le carré] sur le côté du pentagone sont quintuples du carré sur le rayon du cercle dans lequel est inscrit le pentagone (car le côté du pentagone peut produire ceux de l'hexagone et du décagone, comme il a été dit), le carré sur AB et et ceux sur ΔΗ, ΗΓ seront égaux. Car celui-là et ceux-ci sont quintuples de celui sur MN.

De sorte aussi que trois carrés sur AB sont égaux à trois carrés sur ΔΗ, ΗΓ. Or, à trois carrés sur AB sont égaux cinq carrés sur ΚΛ ; cinq carrés sur ΚΛ sont donc égaux à trois carrés sur ΔΗ, ΗΓ.

Et ce qui reste est évident.

27 (***M***) τριπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ, *EHS*, V, 1, 7.3 = 93.19-20:

<ἡ γὰρ τῆς σ>φαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Car le diamètre de la sphère est, en puissance, triple du côté du cube.

28 (***V***^{2}) ὡς δὲ τρία ... τὰ ἀπὸ ΜΞ, *EHS,* V, 1, 7.4-6 = 93.21-22] (cf. N°29-31) :

Ἐὰν δὲ κύβου πλευρὰ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρά.

Si un côté du cube est coupé en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est le côté du pentagone.

29 ($\boldsymbol{V}^2$, sed del.) ὡς δὲ τρία ... τὰ ἀπὸ ΜΞ, *EHS,* V, 1, 7.4-6 = 93.21-22] (cf. N°28-30-31) :

Διὰ τὸ η΄ τοῦ ιγ΄ βιβλίου· ἐὰν γὰρ πενταγώνου ἰσογωνίου καὶ ἰσοπλεύρου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα τμήματα ἴσα εἰσὶ ταῖς τοῦ πενταγώνου πλευραῖς.

À cause de la 8^{e} Proposition du 13^{e} Livre : car, si, dans un pentagone équilatéral et équiangle, les droites sous-tendent deux angles consécutifs, elles se coupent l'une l'autre en extrême et moyenne raison et leurs plus grands segments sont égaux aux côtés du pentagone.

30 (***M***) ὡς δὲ τρία ... τὰ ἀπὸ ΜΞ, *EHS,* V, 1, 7.4-6 = 93.21-22] (cf. N°28-29-31) :

ἐπεὶ γὰρ τῆς τοῦ κύβου πλευρὰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά, τῆς ΔΗ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ ΓΗ.

τῆς δὲ ΜΝ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθέισης τὸ μεῖζον τμῆμά ἡ ΜΞ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΞ. ἐναλλάξ ὡς ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ <Γ>Η πρὸς τὴν ΜΞ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς <Δ>Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΞ. Τρία δὲ τὰ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσα εἰσὶ πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΞ (lire MN) · ὥστε ἔσται, ὡς τρία τὰ ἀπὸ ΔΗ πρὸς τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ, οὕτως πέντε τὰ ἀπὸ τῆς ΜΝ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ ΜΞ[346].

En effet, puisque, du côté du cube coupé en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est le côté du dodécaèdre, de ΔH coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment sera donc ΓH.

Or, de MN coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est MΞ. Donc, comme ΔH relativement à ΓH, ainsi est MN relativement à MΞ. Par permutation, donc, comme ΔH est relativement à MN, ainsi est ΓH relativement à MΞ, et comme le carré sur ΔH est relativement à celui sur MN, ainsi est celui sur ΓH relativement à celui sur MΞ. Or trois de ceux sur ΔH sont égaux à cinq de ceux sur MN ; de sorte que, comme trois des carrés sur ΔH sont relativement à trois de ceux sur ΓH, ainsi seront cinq de ceux sur MN relativement à cinq de ceux sur MΞ.

31 ($\boldsymbol{V}^2$) ὡς δὲ τρία ... τὰ ἀπὸ ΜΞ, *EHS,* V, 1, 7.4-6 = 93.21-22] (cf. N°28-30) :

᾿Επεί, ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, ἐν ἀναλογίᾳ εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ, τέτμηνται δὲ αἱ ΔΗ, ΜΝ ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καί εἰσι μείζονα τμήματα αἱ ΗΓ, ΜΞ, ὡς ἄρα ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΓ, οὕτως ἡ

En effet, puisque, si deux droites sont coupées en extrême et moyenne raison, elles sont en proportion, dans la [proportion] sous-jacente[347], que ΔH, MN ont été coupées en extrême et moyenne raison, et que HΓ, MΞ sont leurs plus grands segments, donc comme

[346] Ici, dans la marge intérieure : « ὥστε καὶ γ΄ τὰ ἀπὸ ΓΗ ἴσα εἰσὶ πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΞ » (de sorte aussi que 3 des carrés sur ΓH sont égaux à cinq de ceux sur MΞ).

[347] Cf. l'énoncé du Lemme SEMR.

ΜΝ πρὸς τὴν ΜΞ· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΔΗ πρὸς τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΗΓ διὰ τὸ ιβ´ τοῦ ε´. ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΞ, οὕτως ε τὰ ἀπὸ ΜΝ πρὸς ε τὰ ἀπὸ ΜΞ διὰ τὸ αὐτὸ ιβ´ τοῦ ε´. καὶ ὡς ἄρα τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΔΗ πρὸς τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ε τὰ ἀπὸ ΜΝ πρὸς ε τὰ ἀπὸ ΜΞ. ὅτι δὲ ἡ ΗΓ μεῖζον τμῆμα τῆς ΔΗ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης, ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ιζ´ τοῦ ιγ´ τῶν στοιχείων πορίσματος δῆλον.	ΔΗ est relativement à ΗΓ, ainsi est ΜΝ relativement à ΜΞ ; ainsi que les carrés sur elles. Or, comme celui sur ΔΗ est relativement à celui sur ΗΓ, ainsi sont trois carrés sur ΔΗ relativement à trois carrés sur ΗΓ, grâce à V 12. Et semblablement aussi, comme celui sur ΜΝ est relativement à celui sur ΜΞ, ainsi sont 5 carrés sur ΜΝ relativement à 5 carrés sur ΜΞ, grâce à V 12. Et donc comme trois carrés sur ΔΗ sont relativement à trois carrés sur ΗΓ, ainsi sont 5 carrés sur ΜΝ relativement à 5 carrés sur ΜΞ. Et que ΗΓ est le plus grand segment de ΔΗ coupée en extrême et moyenne raison, c'est évident à partir du porisme dans la 17^{e} Proposition du 13^{e} Livre des *Éléments.*

32 (***V***^{2}) πέντε δὲ τὰ ... πέντε τοῖς ἀπὸ ΚΛ, *EHS,* V, 1, 7.6-7 = 93.22-23] (cf. N°33) :

Ἐν γὰρ τῇ συστάσει τοῦ εἰκοσαέδρου δείκνυται, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ δύναται τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγράφεται, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου.	En effet, dans la construction de l'icosaèdre, il est démontré que le côté de l'icosaèdre peut produire le rayon du cercle sur lequel l'icosaèdre est décrit et le côté du décagone inscrit dans le même cercle.

33 (***V***^{2}) πέντε δὲ τὰ ... πέντε τοῖς ἀπὸ ΚΛ, *EHS,* V, 1, 7.6-7 = 93.22-23] (cf. N°32) :

Διὰ τὸ ἐναλλάξ, ὡς τρία τὰ ἀπὸ ΔΗ πρὸς ε τὰ ἀπὸ ΜΝ, οὕτως γ τὰ ἀπὸ ΗΓ πρὸς ε τὰ ἀπὸ ΜΞ· τρία δὲ τὰ ἀπὸ ΔΗ ε τοῖς ἀπὸ τῆς ΜΝ ἴσα. καὶ τρία ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΗΓ ε τοῖς ἀπὸ τῆς ΜΞ εἰσιν ἴσα. ἀλλὰ ε τὰ ἀπὸ τῆς ΜΝ καὶ ε τὰ ἀπὸ τῆς ΜΞ ἴσα ε τοῖς ἀπὸ τῆς [ΚΛ], ἤτοι ε τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγράφεται, καὶ ε τὰ ἀπὸ τῆς τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγραφομένου δεκαγώνου πλευρᾶς ἴσα ε τοῖς ἀπὸ τῆς ΚΛ εἰκοσαέδρου πλευρᾶς, ὡς ἐν	Grâce à la permutation, comme trois carrés sur ΔΗ sont relativement à 5 carrés sur ΜΝ, ainsi sont 3 carrés sur ΗΓ relativement à 5 carrés sur ΜΞ. Or trois carrés sur ΔΗ sont égaux à 5 carrés sur ΜΝ. Et donc trois carrés sur ΗΓ sont égaux à 5 carrés sur ΜΞ. Mais 5 carrés sur ΜΝ et 5 carrés sur ΜΞ sont égaux à 5 carrés sur [ΚΛ], soit 5 carrés sur le rayon du cercle sur lequel l'icosaèdre est décrit et 5 carrés sur le côté du décagone inscrit dans le même cercle, sont égaux à 5 carrés sur le côté de l'icosaèdre ΚΛ, comme cela est démontré dans la construction de l'icosaèdre.

τῇ συστάσει τοῦ εἰκοσαέδρου δείκνυται.
καὶ ε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσα τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΔΗ καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΗΓ.

Et 5 carrés sur ΚΛ sont égaux à trois carrés sur ΔΗ et trois carrés sur ΗΓ.

34 (***M***) ἀλλὰ πέντε ... τρίγωνον κύκλου, *EHS,* V, 1, 7.9-11 = 93.24-26] :

ἐὰν γὰρ εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου.

En effet, si un triangle équilatéral est inscrit dans un cercle, le côté du triangle est, en puissance, triple du rayon.

Ad Lemma **2/3**

35 (***M***) τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ... τοῦ ΓΖΔ τριγώνου, *EHS,* V, 1, 8.19-20 = 95.2] :

<ἐὰν γ>ὰρ διὰ τῶν Γ, Δ τῇ ΖΗ ἀγάγω παραλλήλους, διὰ δὲ το<ῦ> Ζ τῇ ΓΔ παράλληλον, <δι>πλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ ΖΓΔ τριγώνου, ὅπερ ἐστὶν ὑπὸ <τῶ>ν ΓΔ, ΖΗ.

En effet, si, par les points Γ, Δ, je mène des parallèles à ΖΗ, et par Ζ, une parallèle à ΓΔ, le parallélogramme — celui qui est celui contenu par ΓΔ, ΖΗ — sera double du triangle ΖΓΔ.

36 (***M***) τὸ ἄρα πεντάκις ... δέκα τρίγωνά ἐστι, *EHS,* V, 1, 8.21 = 95.2-3] :

εἰς πέντε γὰρ ἴσα τρίγωνα διαιρεῖται τὶ πεντάγωνον· αἱ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰς γωνίας τοῦ πενταγώνου ἴσαι εἰσί, διὰ <δὲ> τοῦτο καὶ ἐπέζευξε τὰς ΑΖ, ΒΖ, ΕΖ.

En effet, un certain pentagone se divise en cinq triangles égaux ; car les droites jointes à partir du centre sur les angles du pentagone sont égales, et, à cause de cela, joins aussi ΑΖ, ΒΖ, ΕΖ.

37 (***V***^{2}) τὸ ἄρα πεντάκις ... δέκα τρίγωνά ἐστι, *EHS,* V, 1, 8.21-22 = 95.2-3] :

Τὸ γὰρ παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΗΖ διπλάσιον τοῦ ΓΖΔ τριγώνου· καὶ τὸ πεντάκις ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΗΖ ἴσον τριγώνοις δέκα ἐν δυσὶ γραφομένοις πενταγώνοις. τὰ ὅλα οὖν ἑξάκις τά τε δύο πεντάγωνα καὶ τὰ ε παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ ΓΔ, ΗΖ.

Car le parallélogramme contenu par ΓΔ, ΗΖ est double du triangle ΓΖΔ ; et cinq fois le parallélogramme contenu par ΓΔ, ΗΖ est donc égal à dix triangles décrivant deux pentagones. Alors tout cela six fois, aussi bien les deux pentagones que les cinq parallélogrammes contenus par ΓΔ, ΗΖ.

38 (***V***^{2}) τουτέστι τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ, *EHS,* V, 1, 9.16 = 96.1 (?)] :

Ἐπεὶ δύο τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἐὰν τριπλασιασθῶσιν, γίνονται τὰ μὲν τρίγωνα ἕξ, τὰ δὲ παραλληλόγραμμα

Puisque deux triangles sont égaux au parallélogramme rectangle contenu par ΔΕ, ΒΓ, s'ils se trouvent triplés, d'une part [on aura] six triangles, d'autre part trois τρία. ἓξ δὲ τρίγωνα ὡς τὰ ΔΒΓ ἴσα ἐστὶ δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΑΒΓ. καὶ πάντα ἑξάκις, ἤτοι τὰ τρία παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ καὶ τὰ δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ· γίνεται οὖν τὰ μὲν τριάκοντα, τὰ δὲ εἴκοσι· εἴκοσι δὲ τὰ ΑΒΓ τρίγωνα ἡ ἐπιφάνειά ἐστι τοῦ εἰκοσαέδρου.

parallélogrammes rectangles. Or six triangles tels que ΔΒΓ sont égaux à deux triangles ΑΒΓ. Et tout cela six fois, soit les trois parallélogrammes rectangles contenus par ΔΕ, ΒΓ et les deux triangles ΑΒΓ ; en résulte alors, des uns, trente, des autres, vingt ; or vingt triangles ΑΒΓ sont la surface de l'icosaèdre.

39 (***V***^{2}) τουτέστι τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ, *EHS,* V, 1, 9.16 = 96.1 (?)] :

Ἐπεὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῆς ΖΗ καθέτου καὶ τῆς ΓΔ πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δωδεκαέδρου, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ΔΕ καθέτου καὶ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν· ἑκάτερον γὰρ τῶν παραλληλογράμμων τριακοστὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυέδρου· καὶ ὡς τὸ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον, ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

Puisque, comme le rectangle contenu par la perpendiculaire ΖΗ et le côté du pentagone ΓΔ, est relativement à la surface du dodécaèdre, ainsi est le rectangle contenu par la perpendiculaire ΔΕ et le côté du triangle ΒΓ, relativement à la surface de l'icosaèdre ; car chacun des deux parallélogrammes rectangles est un trentième de la surface du polyèdre ; et comme le parallélogramme rectangle est relativement au parallélogramme rectangle, [ainsi est] la surface relativement à la surface.

40 (***M***) τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ... δωδεκαέδρου, *EHS,* V, 1, 9.22-23 = 96.6-7] :

<οὐχ ὡς> ἐπὶ τῶν μὴ <ἐν> τῇ αὐτῇ σφαί<ρ>ᾳ ἐγγραφομένων <ἀδύνατον> δεῖξαι τοῦτο, ἀλλ' ἐπειδὴ χρείαν <ἔ>χει τούτου <αὐ>τοῦ, διὰ τοῦτο <ὀ>νομάζει τῶν ἐν τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

Il n'est pas impossible de démontrer cela à propos de [polyèdres] non inscrits dans la même sphère, mais, puisqu'il y a besoin de cela précisément, c'est pourquoi on les a désignés comme « ceux qui sont inscrits dans la même sphère ».

Ad Prop. **3**

41 (***M***) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, *EHS,* V, 1, 10.18 = 97.3] :

<φανε>ρόν, ὅτι ἡ ΒΓ <δε>καγώνου ἐστίν. ἐπεὶ <γὰρ> διὰ τοῦ κέντρου οὖ<σα> ἡ ΕΗ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν τὴν <Α>Γ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐ<τὴν> τέμνει · ὥστε <τμη>θήσεται καὶ <ἡ> ΑΒΓ

Il est évident que ΒΓ est un côté du décagone. En effet, puisque ΕΗ, passant par le centre, coupe ΑΓ, ne passant pas par le centre, à angles droits, elle la coupe aussi en deux [parties égales] ; de sorte aussi que l'arc ΑΒΓ se trouvera coupée en deux περιφέρεια <δί>χα τμηθεῖσα <κα>τὰ τὸ Β. ἡ δὲ ΑΓ περιφέρεια πεντ<αγώ>νου · καὶ ἡ ΒΓ <ἄ>ρα περιφέρεια δε<κα>γώνου · ὥστε <ἔστ>αι ἡ ΒΓ εὐθεῖα <δ>εκαγώνου.

[parties égales] selon le point B. Or l'arc ΑΓ est un arc du pentagone ; et donc BΓ est un arc du décagone. De sorte que la droite BΓ sera un côté du décagone.

42 (*M*) συναμφοτέρου ... τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΕ, *EHS,* V, 1, 10.21-22 = 97.6-7] :

ἐὰν <γὰρ ἡ> τοῦ ἑξαγώνου καὶ ἡ τοῦ [δω]δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄκ<ρον καὶ> μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

Car si le côté de l'hexagone et celui du décagone, ceux inscrits dans le même cercle, sont composés, la [droite] entière se trouve divisée en extrême et moyenne raison et son plus grand segment est le côté de l'hexagone.

43 (*M*) καί ἐστι συναμφοτέρου ... ἡμίσεια ἡ ΕΗ, *EHS,* V, 1, 10.22-23 = 97.7] :

διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα.

Grâce au premier théorème.

44 (*M*) τῆς δὲ ΒΕ ἡμίσεια ἡ ΕΖ, *EHS,* V, 1, 10.23-24 = 97.8] :

<ὅτι> γὰρ <ἡ> ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν <π>λευρὰν τοῦ <ἰσο>πλεύρου τριγώνου κάθετος ἡμίσειά <ἐστι τῆς> ἐκ τοῦ κέντρου, δέδεικται.

En effet, que la perpendiculaire [menée] à partir du centre sur le côté du triangle équilatéral est une moitié du rayon, cela est démontré.

45 (*M*) τῆς ΕΗ ἄρα ... τμῆμά ἐστιν ἡ ΕΖ, *EHS,* V, 1, 10.24–11.1 = 97.8-9] :

<ἐπεὶ γάρ, ὡς συ>ναμφότερος ἡ <Ε>ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐναλλάξ, ὡς συναμ<φότερος ἡ ΕΒΓ> πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΖ.
συναμφοτέρου δὲ τῆς ΕΒΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ Β<Ε · ὥστε> καὶ τῆς ΕΗ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΕΖ.

En effet, puisque comme sont EB, BΓ, pris ensemble, sont relativement à EH, ainsi est BE relativement à EZ, par permutation, comme EB, BΓ, pris ensemble, sont relativement à BE, ainsi est EH relativement à EZ. Or, de EB, BΓ, pris ensemble, coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est BE ; de sorte aussi que de EH, coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est EZ.

46 (*M*) ἔστι δὲ καὶ ... μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, *EHS,* V, 1, 11.1-2 = 97.9-10] :

τῆς γὰρ <τοῦ> κύβου πλευρᾶ<ς> ἄκρον καὶ μέσον λό<γον> τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν <ἡ> τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά.

Car du côté du cube coupé en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est le côté du dodécaèdre.

47 (***M***) καὶ ἐπεί ἐστιν ... πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΕ, *EHS,* V, 1, 11.4-6 = 97.12-14] :

κοινὸν γὰρ αὐτῶν ὕψος ἡ ΕΖ.	Car leur hauteur commune est EZ.

48 (***M***) τουτέστιν ... τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, *EHS,* V, 1, 11.8-9 = 97.14-15] :

διὰ τὸ πόρισμα τοῦ πρὸ αὐτοῦ.	Grâce au Porisme du théorème avant celui-ci.

49 (***V***^{2}) καί ἐστι συναμφοτέρου ... πρὸς τὴν ΓΔ, *EHS,* V, 1, 10.22–11.11 = 97.7-17][348] :

Ἐπεὶ τῆς ΕΒΓ ὡς μιᾶς ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΕΗ διὰ τὸ πρῶτον τοῦ παρόντος βιβλίου, ἔστι δὲ καὶ τῆς ΕΒ ἡμίσεια ἡ ΕΖ διὰ τὸ πόρισμα τοῦ αὐτοῦ πρώτου θεωρήματος, ὡς ἄρα ἡ ΕΒΓ ὅλη πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΕΖ· διπλῆ γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας.	Puisque, de EB, BΓ, considérée comme une seule droite, une moitié est EH, grâce au premier théorème du présent Livre, et que de EB, une moitié est EZ, grâce au porisme du même premier théorème, donc, comme le tout EB, BΓ est relativement à EH, ainsi est EB relativement à EZ ; car chacune des deux est double de chacune des deux.
καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΕΒΓ ὅλη πρὸς ΕΒ (τεμνομένη γὰρ ἄκρον καὶ μέσον λόγον μεῖζον τμῆμα ἔχει τὸ ΕΒ διὰ τὸ θ´ τοῦ ιγ´ βιβλίου), οὕτω καὶ ἡ ΕΗ πρὸς ΕΖ. τεμνομένη ἄρα καὶ ἡ ΕΗ ἄκρον καὶ μέσον λόγον μεῖζον ἕξει τμῆμα τὸ ΕΖ.	Et, par permutation, comme le tout EB, BΓ est relativement à EB (coupée en effet en extrême et moyenne raison, elle a comme grand segment EB d'après la 9e Proposition du 13e Livre), ainsi est EH relativement à EZ. La droite EH aussi coupée en extrême et moyenne raison aura donc EZ comme [grand] segment.
ἀλλὰ καὶ ἡ Θ ἡ τοῦ κύβου πλευρά, εἰ τμηθήσεται ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεῖζον ἕξει τμῆμα τὴν τοῦ πενταγώνου πλευρὰν διὰ τὸ πόρισμα τοῦ ιζ´ τοῦ ιγ´ βιβλίου. ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΑ τὴν τοῦ πενταγώνου πλευράν, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΕΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς Θ καὶ τῆς ΕΖ ἴσον ἔσται τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ καὶ ΗΕ διὰ τὸ ις´ τοῦ ϛ´ βιβλίου. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς Θ καὶ ΕΖ περιεχόμενον παραλληλόγραμμον πρὸς	Mais aussi Θ, le côté du cube, s'il est coupé en extrême et moyenne raison, il aura comme grand segment le côté du pentagone grâce au porisme de la 17e Proposition du 13e Livre. Donc, comme Θ est relativement à ΓA, le côté du pentagone, ainsi est EH relativement à EZ. Le rectangle contenu par Θ et EZ sera donc égal au rectangle contenu par AΓ et HE, grâce à la 16e Proposition du 6e Livre. Le rectangle contenu par Θ et EZ, relativement au rectangle contenu par AΓ, EZ, aura comme rapport celui de la base Θ relativement à la

348 Cette scholie reprend toute la portion "démonstration" de la Proposition XIV **3** en explicitant les résultats antérieurs mis en œuvre.

τὸ ὑπὸ τῆς ΑΓ, ΕΖ λόγον ἕξει, ὃν ἡ Θ βάσις πρὸς ΑΓ βάσιν διὰ τὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχειν τὴν ΕΖ. καὶ ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΗΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΕ.
ἐδείχθη δέ, ὅτι τὸ τριακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου καὶ τῆς ἐπὶ ταύτην καθέτου ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἐν ᾧ ἐγγράφεται, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.
ὡσαύτως καὶ τὸ τριακοντάκις ὑπὸ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ τῆς ἐπὶ ταύτην καθέτου ἀπὸ κέντρου τοῦ κύκλου, ἐν ᾧ ἐγγράφεται τὸ τοιοῦτον τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ.
καὶ ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς ΔΓ, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου.

base ΑΓ, à cause du fait qu'ils ont la même hauteur, ΕΖ. Et donc, comme Θ est relativement à ΓΔ, ainsi est le rectangle contenu par ΓΑ, ΗΕ, relativement au rectangle contenu par ΓΔ, ΖΕ.
Or il a été démontré que trente fois le rectangle contenu par un unique côté du pentagone équilatéral et équiangle et la perpendiculaire sur celui-ci, menée à partir du centre du cercle dans lequel il est inscrit, est égal à la surface du dodécaèdre. Semblablement aussi, trente fois celui contenu par celui du triangle équilatéral et la perpendiculaire sur celui-ci, menée à partir du centre du cercle dans lequel ce même triangle est inscrit, est égal à la surface de l'icosaèdre. Et donc, comme Θ est relativement à ΔΓ, ainsi est la surface du dodécaèdre relativement à la surface de l'icosaèdre.

Ad Lemma **3**/**3***aliter*

50 (***M***) ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΗΒ ἴση, *EHS,* V, 1, 12.10 = 98.15] :

<ἐπεὶ γὰ>ρ, ἡ ΑΒΕ περιφέρεια τῇ ΑΓΕ περιφ<ερείᾳ ἴση ἐστίν, ὧν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ Α>Γ περιφερείᾳ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ περιφ<έρεια τῇ ΓΕ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν · ὥστε> καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΓ ἴση · ἐπὶ γὰρ ἴσων περιφερειῶν <βεβήκασιν>. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ εὐθεῖα τῇ ΑΓ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΑΗ, ἀλλὰ καὶ γωνία γωνίᾳ ἴση, <καὶ βά>σις ἄρα βάσει ἴση.

En effet, puisque l'arc ΑΒΕ est égal à l'arc ΑΓΕ, dont [la partie], l'arc ΑΒ, est égal à l'arc ΑΓ, ce qui reste, l'arc ΒΕ est donc égal à l'arc ΓΕ ; de sorte aussi que l'angle sous ΕΑΒ est égal à l'angle sous ΕΑΓ ; car ils sont appuyés sur des arcs égaux.
Puis donc que la droite ΒΑ est égale à ΑΓ, que ΑΗ est commune, mais aussi qu'un angle est égal à un angle, la base est donc aussi égale à la base.

51 (***V***$^{\mathbf{2}}$) ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ... τρίγωνα τὰ ΑΒΔ, *EHS,* V, 1, 12.11-12 = 98.16] :

τὸ γὰρ παραλληλόγραμμον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΑΔ, ΒΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΔ τριγώνου.

Car le parallélogramme rectangle contenu par ΑΔ, ΒΗ est double du triangle ΑΒΔ.

52 (*V*[2]) ἐπεὶ οὖν διπλῆ ... ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ, *EHS,* V, 1, 12.16-17 = 98.19-20] :

ἐὰν γὰρ ὕψος κοινὸν ποιήσωμεν τὴν ΖΑ, ἔσται ὡς ἡ ΗΘ βάσις πρὸς ΘΓ βάσιν, οὕτω τὸ ὑπὸ ΗΘ, ΖΑ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΖΑ παραλληλόγραμμον.	Car si nous faisions ZA hauteur commune, comme la base HΘ est relativement à la base ΘΓ, ainsi sera le parallélogramme rectangle contenu par HΘ, ZA relativement au parallélogramme rectangle contenu par ΘΓ, ZA.

53 (*M*) πεντάκις δὲ ... ὑπὸ ΑΖ, ΒΘ, *EHS,* V, 1, 13.1-2 = 98.23–99.1] :

ἐπεὶ γὰρ ἡ Η<Γ τῆς> ΓΘ τριπ<λῆ>, ἡ δὲ ΒΗ τῇ <ΗΓ> ἴση, καὶ <ἡ ΒΗ> τῆς ΓΘ τριπ<λῆ>. ἔστι δὲ αὐτῆ<ς> ἡ ΗΘ διπλ<ῆ>· ὅλη ἄρα ἡ Β<Θ τῆς> ΘΓ (corr. ex ΒΓ) πενταπ<λασία>. καί ἐστιν, ὡς ἡ Β<Θ> πρὸς τὴν ΘΓ, <οὕτως> τὸ ὑπὸ ΒΘ, Α<Ζ> πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ · <ὥστε> καὶ τὸ ὑπὸ ΒΘ, ΑΖ πεν<τα>πλάσιον τοῦ ὑπὸ <ΑΖ, ΘΓ>.	En effet, puisque HΓ est triple de ΓΘ, que BH est égale à HΓ, BH est aussi triple de ΓΘ. Or HΘ est aussi double de celle-ci; BΘ tout entière est donc quintuple de ΘΓ. Et comme BΘ est relativement à ΘΓ, ainsi est le rectangle contenu par BΘ, AZ relativement à celui contenu par AZ, ΘΓ ; de sorte aussi que le rectangle contenu par BΘ, AZ est quintuple de celui contenu par AZ, ΘΓ.

Ad Prop. 3*aliter*

54 (*M*) ἰσόπλευρον ἄρα ... τρίγωνον, *EHS,* V, 1, 13.22 = 99.15] (cf. N°55) :

ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καταγομένη ἡμί<σειά> ἐστι τῆς ἀπὸ (lire ἐκ) τοῦ κέντρου, καὶ ἐστιν ἡ <ΕΗ> ἡμίσεια τῆς ΕΖ, <ἡ> ΔΜ ἄρα τ<ρι>γώνου ἐστὶν ἰσοπ<λεύ>ρου τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγαφομένου.	En effet, puisque la droite menée à partir du centre du cercle sur le côté du triangle équilatéral est une moitié du rayon, et que EH est la moitié de EZ, donc ΔM est un côté du triangle équilatéral, celui qui est inscrit dans le cercle ABΓ.
εἰ γάρ τις λέγοι, ὅτι οὔκ ἐστιν ἡ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΖ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγαφομένου, τουτέστιν ἡ ΔΜ, ἀλλὰ ἀπὸ ἄλλου σημείου τυχὸν ἡ πρὸς ὀρθὰς <ἀγομένη> τῇ ΑΖ, ἡ <το>ῦ τρι<γώνου> πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν <ΑΒΓ κύκλον ἐγγα>φομένου εὑρε<θήσεται> κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον. <ἐπ>εὶ γὰρ ἡ ΔΖΜ γωνία (lire περιφέρεια) τριγώνου	En effet, si quelqu'un dit que ce n'est pas la droite menée à partir de H à angles droits avec AZ qui est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ABΓ, c'est-à-dire ΔM, mais que c'est celle qui est menée à angles droits avec AZ à partir d'un autre point, le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ABΓ, sera trouvé selon tel ou tel autre point. En effet, puisque l'arc ΔZM est un arc du triangle équilatéral inscrit dans le

ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγαφομένου, ἡ ΔΖΜ ἄρα γωνία (lire περιφέρεια) τρίτον ἐστὶ τῆς ὅλης γωνίας (lire περιφερείας). ὥστε ἡ ΔΑΜ γωνία (lire περιφέρεια) διπλῆ ἐστι τῆς ΔΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἡ <Α>ΔΖ περιφέρεια τῇ ΑΜΖ ἴση, καὶ ἡ ΔΖ γωνία (lire περιφέρεια) τῇ ΖΜ ἴση · ἡ γὰρ ΑΜ (lire ΔΜ) εὐθεῖα δίχα <τέ>τμηται κατα τὸ Η · λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΑ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΜΑ ἴση · ὥστε ἡ ΔΑΜ <περ>ιφέρεια, ἥτις <δι>πλῆ ἐστι τῆς <ΔΖ>Μ, δίχα <τέ>τμηται κατα <τ>ὸ Α. τὸ ἄρα <Α>ΔΜ τρίγωνον <ἰσό>πλευρόν ἐστιν.

cercle ΑΒΓ, l'arc ΔΖΜ sera un tiers de la circonférence entière. De sorte que l'arc ΔΑΜ est double de l'arc ΔΖΜ.

Et puisque l'arc ΑΔΖ est égal à l'arc ΑΜΖ, l'arc ΔΖ est aussi égal à l'arc ΖΜ. Car la droite ΔΜ est coupée en deux [parties égales] selon le point Η ; l'arc restant ΔΑ est donc égal à l'arc restant ΜΑ ;
De sorte que l'arc ΔΑΜ, lequel est double de ΔΖΜ, est coupé en deux [parties égales] selon le point Α. Le triangle ΑΔΜ est donc équilatéral.

55 (***V***[2]) ἰσόπλευρον ἄρα ... τρίγωνον, *EHS,* V, 1, 13.22 = 99.15] (cf. N°54) :

ἐπεὶ γὰρ ἡ ΕΖ ἴση οὖσα τῇ ΑΕ (ἐκ κέντρου γάρ) διπλῆ ἐστι τῆς ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ ΑΔΜ τριγώνου ἀγομένης ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἐν ᾧ ἐγγέγραπται τὸ τρίγωνον, ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ΑΔΜ τρίγωνον.

En effet, puisque ΕΖ, qui est égale à ΑΕ (car c'est un rayon), est double de la droite menée sur la base du triangle ΑΔΜ à partir du centre du cercle dans lequel est inscrit le triangle, le triangle ΑΔΜ est équilatéral.

56 (***M***) τὸ δὲ ὑπὸ ΑΗΔ τῷ ΑΔΜ τριγώνω, *EHS,* V, 1, 13.23-24 = 99.16-17] (cf. N°57) :

ἐπεὶ γὰρ διπλ<άσιόν> ἐστι τὸ ὑπὸ ΑΗ, <ΗΔ> τοῦ ΑΗΔ τρι<γώνου>, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΔ<Μ> τρίγωνον τοῦ ΑΗ<Δ> διπλάσιον, τὸ <ἄρα> ὑπὸ ΑΗΔ <τῷ> ΑΔΜ τριγώνῳ <ἴσον ἐστίν>.

En effet, puisque le rectangle contenu par ΑΗ, ΗΔ est double du triangle ΑΗΔ, que le triangle ΑΔΜ, est double de ΑΗΔ, le rectangle contenu par ΑΗ, ΗΔ est donc égal au triangle ΑΔΜ.

57 (***V***[2]) τὸ δὲ ὑπὸ ΑΗΔ τῷ ΑΔΜ τριγώνω, *EHS,* V, 1, 13.23-24 = 99.16-17] (cf. N°56) :

τὸ γὰρ παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ ΑΗΔ περιεχόμενον διπλοῦν ἐστι τοῦ ΑΔΗ τριγώνου· ἴσον ἄρα τῷ ΑΔΜ.

Car le parallélogramme rectangle contenu par ΑΗ, ΗΔ est double du triangle ΑΔΗ ; il est donc égal au [triangle] ΑΔΜ.

58 (***V***[2]) ἔστιν ἄρα ... πρὸς τὸ τρίγωνον, *EHS,* V, 1, 13.24 = 99.17-18] :

τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ περιεχόμενον παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ πενταγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΗΔ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΑΔΜ ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ

Le parallélogramme rectangle contenu par ΑΗ, ΘΒ est égal au pentagone, tandis que le parallélogramme rectangle contenu par ΑΗ, ΗΔ est égal au triangle équilatéral ΑΔΜ. Donc, comme le parallélogramme rectangle

ΑΗ, ΘΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ πεντάγωνον, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα.	contenu par AH, ΘB est relativement au pentagone, ainsi est le parallélogramme rectangle contenu par AH, HΔ relativement au triangle. Et donc, par permutation.

59 (***V^2***) καί εἰσι δώδεκα ... δέκα αἱ ΒΓ, *EHS,* V, 1, 14.5 = 100.2] :

ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΒΘ πενταπλασίων τῆς ΘΓ, ἡ δὲ ΒΓ τῆς ΘΓ ἑξαπλασίων, ἑξάκις ἡ ΒΘ πεντάκις τῇ ΒΓ ἴση ἔσται, καὶ ἀναλόγως δωδεκάκις ἡ ΒΘ δεκάκις τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση.	En effet, puisque, d'une part BΘ est quintuple de ΘΓ, d'autre part BΓ est sextuple de ΘΓ, six fois BΘ sera égal à cinq fois BΓ, et proportionnellement, douze fois BΘ est égal à dix fois BΓ.

Ad Prop. **4**

60 (***M***) ἔστι δὲ καὶ τὰ ... τριπλάσια τοῦ ἀπὸ ΓΔ, *EHS,* V, 1, 15.24 = 101.13-14] :

διὰ τὸ τέταρτον θεώρημα τοῦ ιγ´ βιβλίου.	Grâce au quatrième théorème du Livre XIII.

61 (***V^2***) ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ... πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒΔ, *EHS,* V, 1, 16.12-14 = 101.19-20] :

Ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε, οὕτως [τὸ τετράγωνον] τὸ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΖΔ.	Comme le carré sur H est relativement à celui sur E, ainsi est [le carré] égal à ceux sur BΓ, ΓΔ relativement au carré égal à ceux sur BΓ, ZΔ.

62 (***M***) τὸ ἀπὸ τῆς ... πρὸς τὸ ἀπὸ ... τμήματος, *EHS,* V, 1, 17.1-4 = 102.2-5] :

ὥστε καὶ μήκει ἔσονται, ὡς ἡ Η πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος. ἐπεὶ οὖν πᾶσα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένη τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τῇ ΓΔ (lire ΓΒ), δῆλον, ὡς καθόλου ἐστιν ἡ πρότασις καὶ προβαίνει, καὶ καλῶς εἶπεν ἐν τῇ προτάσει εὐθείας οἱασδηποτοῦν · δείξας γὰρ τοῦτο ἐπὶ τῆς ΓΒ ἔχει καθόλου αὐτὸ δεδειγμένον ἐπὶ πάσης εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης.	De sorte aussi qu'en longueur, comme H est relativement à E, ainsi sera la droite pouvant produire le carré sur la droite entière et celui sur le grand segment, relativement à la droite pouvant produire le carré sur la droite entière et celui sur le petit segment. Puis donc qu'il est évident que toute droite coupée en extrême et moyenne raison a le même rapport que ΓB, ce que l'énoncé, en tant qu'il est général, propose aussi et dit à juste titre "une droite quelconque" ; car ce qui a été démontré sur ΓB a une valeur générale, étant démontré sur toute droite coupée en extrême et moyenne raison.

Ad Prop. **5**

63 (***M***) ἐν δὲ ταῖς σφαίραις ... πεσοῦνται, *EHS,* V, 1, 17.16-20 = 103.2-5] (cf. N°64-66) :

τοῦτο ἐν τῷ μικρῷ ἀστονόμῳ δείκνυται.	Ceci est démontré dans la *Petite Astronomie.*

64 (***M***) ἐν δὲ ταῖς σφαίραις ... πεσοῦνται, *EHS,* V, 1, 17.16-20 = 103.2-5] (cf. N°63-65-66) :

οὐχ ὅτι χρήζει τοῦ δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τὰ λειπόμενα (lire κέντρα) τῶν κύκλων πίπτουσίν αἱ κάθετοι, ἀλλ' ὅτι τοῦτο ἐν τῷ μικρῷ ἀστονόμῳ δείκνυται.	Ce n'est pas le cas qu'il y ait besoin de démontrer que les perpendiculaires tombent sur les centres des cercles, mais, qu'il en soit ainsi est démontré dans la *Petite Astronomie.*

65 (***V***^{2}) ἐν δὲ ταῖς σφαίραις ... πεσοῦνται, *EHS,* V, 1, 17.16-20 = 103.2-5] (cf. N°63-64-66) :

ὡς ἐν τοῖς σφαιρικοῖς τοῦ Θεοδοσίου δέδεικται.	Comme cela est démontré dans les *Sphériques* de Théodose.

66 (***V***^{2}) ἐν δὲ ταῖς σφαίραις ... πεσοῦνται, *EHS,* V, 1, 17.16-20 = 103.2-5] (cf. N°63-65) :

Ὅτι μὲν ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου οἱ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἴσοι κύκλοι, δείκνυταί πως διὰ τοῦ ϛ´ τοῦ πρώτου τῶν σφαιρικῶν· ὅτι δὲ καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων πίπτουσιν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι, δῆλον ἀπὸ τοῦ πορίσματος τοῦ πρώτου θεωρήματος τοῦ α´ βιβλίου τῶν σφαιρικῶν.	D'une part, que les cercles égaux dans la sphère soient également éloignés du centre, cela est démontré d'une certaine manière grâce à la 6e Proposition du premier Livre des *Sphériques* ; d'autre part, que les droites menées perpendiculaires à partir du centre de la sphère sur les plans des cercles tombent sur leurs centres, cela est évident à partir du porisme au premier théorème du 1e Livre des *Sphériques.*

Ad Lemma **SEMR**

67 (***M***) ὥστε καὶ ὡς ... πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, *EHS,* V, 1, 20.4-6 = 104.14-16] (cf. N°68) :

τοῦτο ἐν τῷ βι´ (lire β´, *Elem.* II 8) τῶν Εὐκλείδου δέδεικται, ὅτι, ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνος τῶν τμημάτων	Dans le Livre II des *Éléments* d'Euclide, il est démontré ceci, que si une droite est coupée au hasard, quatre fois le rectangle contenu par la droite entière et l'un de ses segments

μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι.

avec le carré sur le segment restant est égal au carré sur la droite entière et le premier desdits segments, en tant que décrit comme sur une droite unique.

68 ($\boldsymbol{V}^2$) ὥστε καὶ ὡς ... πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, *EHS,* V, 1, 20.4-6 = 104.14-16] (cf. N°67) :

ἀλλὰ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς ΒΓ δηλαδὴ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ διὰ τὸ η΄ τοῦ δευτέρου βιβλίου.

Mais quatre fois le parallélogramme rectangle contenu par AB, BΓ avec le carré sur AΓ est égal au carré décrit sur AB et le segment restant, BΓ, considérés comme une droite unique, c'est évident grâce au 8e théorème du deuxième Livre.

69 ($\boldsymbol{V}^2$) καὶ μήκει ... τουτέστι δύο αἱ ΔΕ, πρὸς τὴν ΔΖ, *EHS,* V, 1, 20.6-9 = 104.16-18] :

αἱ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῆς ΑΓ δύο εἰσὶν αἱ ΑΒ· ἡ γὰρ ΑΓ προσλαβοῦσα τὴν ΒΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ· ὡσαύτως καὶ ἡ ΔΖ προσλαβοῦσα τὴν ΖΕ ἴση γίνεται τῇ ΔΕ.

Les droites AB, BΓ avec AΓ sont deux AB; car AΓ adjointe à BΓ, c'est AB ; semblablement aussi ΔZ adjointe à ZE, devient égale à ΔE.

70 ($\boldsymbol{V}^2$) καὶ τὰ ἡμίση ... πρὸς τὴν ΔΖ, *EHS,* V, 1, 20.9-10 = 104.18-19] :

ἐπεὶ γὰρ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῆς ΑΓ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΑΒ, ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ ἡμίσεια ἡ ΔΕ, τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον.

En effet, puisque la moitié des AB, BΓ avec AΓ est AB, tandis que, semblablement aussi, la moitié des ΔE, EZ avec ΔZ est ΔE, les parties auront le même rapport que les multiples pris semblablement.

Ad Récapitulations N° **2**

71 ($\boldsymbol{V}^2$) ἐπεὶ γάρ ἐστιν ... εἰκοσαέδρου πλευράν, *EHS,* V, 1, 21.18-22 = 105.20-23] :

ὡς δὲ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

Or, comme la surface du dodécaèdre est relativement à celle de l'icosaèdre, ainsi est le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre.

Table de correspondance

N°	Édition par Heiberg	N°	Édition par Heiberg	N°	Édition par Heiberg
2	[Heiberg, 1903], N°1	29	[Heiberg, 1888], N°13	51	[Heiberg, 1888], N°21
3	[Heiberg, 1888], N°1	30	[Heiberg, 1903], N°11	52	[Heiberg, 1888], N°22
4	[Heiberg, 1903], N°2	31	[Heiberg, 1888], N°14	53	[Heiberg, 1903], N°25
7	[Heiberg, 1888], N°2	32	[Heiberg, 1888], N°11	54	[Heiberg, 1903], N°27
10	[Heiberg, 1888], N°3	33	[Heiberg, 1888], N°15	55	[Heiberg, 1888], N°23
11	[Heiberg, 1903], N°3	34	[Heiberg, 1903], N°10	56	[Heiberg, 1903], N°26
12	[Heiberg, 1888], N°4	35	[Heiberg, 1903], N°12	57	[Heiberg, 1888], N°24
13	[Heiberg, 1888], N°5	36	[Heiberg, 1903], N°13	58	[Heiberg, 1888], N°25
14	[Heiberg, 1903], N°4	37	[Heiberg, 1888], N°17	59	[Heiberg, 1888], N°26
15	[Heiberg, 1888], N°6	38	[Heiberg, 1888], N°19	60	[Heiberg, 1903], N°28
16	[Heiberg, 1888], N°7	39	[Heiberg, 1888], N°18	61	[Heiberg, 1888], N°27
18	[Heiberg, 1903], N°5	40	[Heiberg, 1903], N°15	62	[Heiberg, 1903], N°29
19	[Heiberg, 1888], N°8	41	[Heiberg, 1903], N°16	63	[Heiberg, 1903], N°30
20	[Heiberg, 1903], N°6	42	[Heiberg, 1903], N°19	64	[Heiberg, 1903], N°31
21	[Heiberg, 1888], N°9	43	[Heiberg, 1903], N°17	65	[Heiberg, 1888], N°28
22	[Heiberg, 1903], N°7	44	[Heiberg, 1903], N°18	66	[Heiberg, 1888], N°29
23	[Heiberg, 1903], N°8	45	[Heiberg, 1903], N°20	67	[Heiberg, 1903], N°32
24	[Heiberg, 1888], N°12	46	[Heiberg, 1903], N°21	68	[Heiberg, 1888], N°30
25	[Heiberg, 1903], N°14	47	[Heiberg, 1903], N°22	69	[Heiberg, 1888], N°31
26	[Heiberg, 1888], N°16	48	[Heiberg, 1903], N°23	70	[Heiberg, 1888], N°32
27	[Heiberg, 1903], N°9	49	[Heiberg, 1888], N°20	71	[Heiberg, 1888], N°33
28	[Heiberg, 1888], N°10	50	[Heiberg, 1903], N°24		

Quelques observations sur les scholies

- Les scholiastes commencent leur annotation de manière systématique, mais se "fatiguent" vite. D'où 19 scholies (27 %) sur la seule Proposition **1** et son ajout !
- Ils focalisent leur attention sur les preuves ; il n'y a donc aucune scholie sur les portions métamathématiques, voire historiques, comme la préface et la transition entre les Propositions XIV **1** et **1/2**, une seule sur les doubles récapitulations finales.
- Une unique scholie est rattachée à la détermination de XIV **1** dans ***P*** (à cause de l'écart avec l'énoncé), aucune ne porte sur les portions "énoncé" ou "ecthèse" des Propositions. Huit portent sur des "constructions" (dont 7 identifications de droites) et plus de 87% (62 sur 71) concernent les parties "démonstration" proprement dites.
- Ils sont très attentifs à la structure déductive, à la fois interne au Livre XIV et aux relations entre ledit Livre et les *Éléments* I-XIII. D'où des références livresques explicites :

— à XIV **1**, XIV **1**$^{+}$, XIV **1/2**, à chacune des trois parties du Lemme XIV **2/3**, autrement dit aux assertions à caractère explicitement lemmatique ;

— à II 8 ; V 12 ; VI 16, 33 ; XIII 4, 8, 9, 10, 12, 16, 17Por., 18.

• D'où, également, des références "externes" à la *Petite astronomie,* ou, plus spécifiquement aux *Sphériques* de Théodose, voire à *Sph.* I 6, I 1 Por.

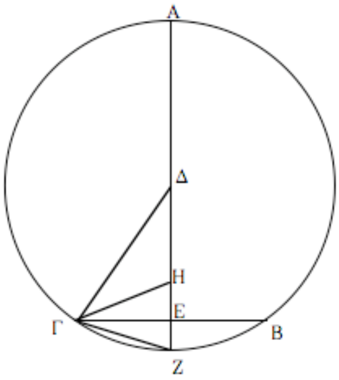
• D'autres résultats des *Éléments* sont explicitement utilisés, parfois dans des citations non instanciées, mais sans référence livresque, tels que I 4, 5, 6, 11, 15, 31, 32, 41, 47 ; III 3, 27, 28, 31 ; IV 15 Por. ; V 9, 15, 16 ; VI 1, 4, 22 ; XIII 17. On pourrait leur adjoindre le Lemme SEMR, évoqué à plusieurs reprises, dont une possible *CNI* dans la scholie N°31 à XIV **2** (= ***V,*** N°14).

• L'annotation la plus significative est sans doute la N°25 à XIV **2** (= ***M,*** N°14) qui démontre la Proposition additionnelle XIII 9$^{\text{bis}}$, Proposition que l'on trouve dans toutes les versions médiévales arabes et arabo-latines, mais pas dans le texte grec proprement dit.

• Plus généralement, du point de vue mathématique, les scholies de ***M*** nous ont paru davantage pertinentes que celles de ***V***, trop souvent paraphrastiques.

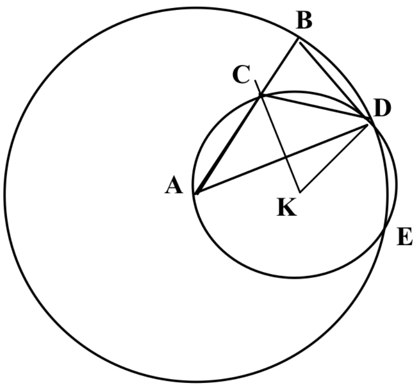
5. Notes complémentaires

5.1 (à XIV **1**)



Au passage, on a vu que le triangle HΓZ est isocèle ; or son angle à la base est égal à l'angle à la base du triangle isocèle ZΔΓ. Donc les triangles ZΔΓ, HΓZ sont équiangles (par *Él.* I 32) et semblables.
Par conséquent (*Él.* VI 4) : ΔZ : ZΓ :: ZΓ : ZH.
Mais on a aussi établi que la droite ΓZ est égale à HΓ et à ΔH. Donc : ΔZ : ΔH:: ΔH: ZH.
Le rayon ΔZ est coupé en extrême et moyenne raison au point H et son plus grand segment est ΔH.

Cette remarque paraphrase substantiellement la démonstration que Pappus (*Coll.,* 418.3-32 Hultsch) donne pour sa Proposition V 41, un des lemmes préparatoires à sa propre comparaison des cinq polyèdres réguliers (isépiphanes). On peut remarquer que cela constitue une sorte de converse à la Proposition *Él.* IV 10, construction lemmatique qui sert à inscrire un pentagone régulier dans un cercle (*Él.* IV 11) :



la droite AB est coupée en extrême et moyenne raison au point C, avec AC > CB, puis le cercle ABE de centre A et de rayon AB est décrit, dans lequel la droite BD = AC est ajustée. La droite CD est jointe et un cercle est circonscrit au triangle ACD. On montre que BD lui est tangente ce qui permet, par un argument sur les angles, d'établir que AC = CD = DB et que le triangle ABD est isocèle possédant des angles à la base doubles de l'angle au sommet, soit, en termes modernes, un triangle (72°, 72°, 36°).

La construction utilisée dans IV 11 revient à circonscrire un cercle à un triangle équiangle (72°, 72°, 36°) au triangle ABD. Alors les droites AB (= AD) sont diagonales du pentagone inscrit dans ce cercle, BD (= DC = CA) en est le côté. Au passage, on voit que le plus grand segment de AB dans la SEMR, est AC = BD, le côté du pentagone, soit substantiellement XIII. 8. On peut aussi raisonner sur le triangle ACD et son cercle circonscrit. Appelons-en K le centre. Dans ce cercle AC = CD est le côté d'un pentagone régulier et AD (= AB) est sa diagonale. D'après *Él.* III 20, l'angle sous CAD, inscrit, est moitié de celui au centre, sous CKD. Si donc CD (*i.e.* l'angle CKD) sous-tend un cinquième du cercle autour de ACD, le côté BD (*i.e.* l'angle BAD), qui lui est égal, sous-tend un dixième du cercle BDE de centre A.

Les configurations géométriques de *Él.* IV 10, XIV **1** et *Coll.* V 41 sont donc très proches, les triangles isocèles ABD, ACD, BCD correspondant respectivement aux triangles ΔΓΖ, ΔΗΓ, ΖΗΓ. Pour paraphraser autrement la démonstration de Pappus, dans le cercle BDE, la droite AB est un rayon (ou côté de l'hexagone) et AC = BD, son plus grand segment dans la SEMR, est un côté du décagone, c'est-à-dire le résultat que nous avons appelé XIII 9^{bis}.

La remarque en avait déjà été faite par Commandino, dans sa note de commentaire C à *Coll.* V 41. Il ne semble pas que Pappus lui-même se soit aperçu de cette dérivation très expédiente, puisqu'il en propose une autre preuve (en termes de théorie des proportions, voir *infra,* III, § 2) dans sa Proposition V 47 (434.8-19 Hultsch).

5.2 (à XIV **2**)

On possède trois preuves du résultat d'Aristée dans la littérature mathématique grecque conservée :

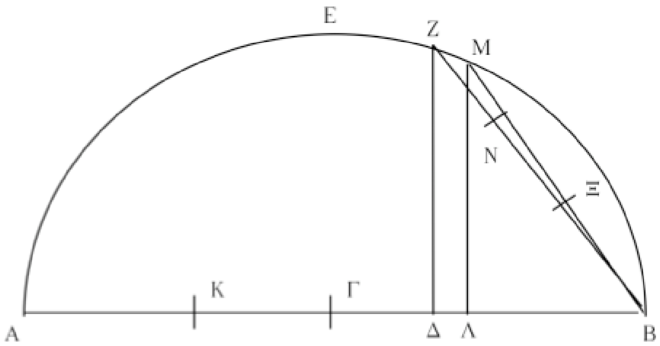
- Celle du Livre XIV (avec son Lemme XIV **1/2**) et sa version, rédigée un peu différemment, dans le Lemme 13 du Livre V (= V 48*aliter*) de la *Collectio* de Pappus.
- La première démonstration du même écrit (*Collectio* V 48 = Lemme 12).
- La déduction, quasi immédiate, faite, toujours par Pappus, à l'issue des Propositions III 56-57 dans lesquelles, après avoir inscrit dans une sphère un icosaèdre et un dodécaèdre reposant sur leurs bases respectivement triangulaire et pentagonale, il constate que lesdites bases sont circonscrites par des cercles égaux de la sphère.

Il se peut que tel ait été le contexte de la découverte de ce résultat (et de la Proposition correspondante sur les cercles circonscrits aux bases de l'octaèdre et du cube) ; du moins l'inscription des polyèdres dans une sphère donnée — contrairement aux constructions des Propositions XIII 13-17 — fournit un cadre où ces propriétés se dégagent naturellement.

Les deux preuves du Livre V de la *Collectio* sont — aux yeux d'un Moderne — substantiellement identiques[349] : les ingrédients mathématiques mobilisés sont, soit les mêmes, soit équivalents à une homothétie près. Pour le voir, il est expédient de reprendre la configuration de la Proposition XIII 18 des *Éléments* que nous avons discutée plus haut, car la Proposition V 48 et ses deux lemmes (V 45-46) ont toutes trois des diagrammes qui reproduisent une partie de celui de XIII 18, même s'ils n'en reprennent pas les résultats.

Nous unifierons les lettrages, contrairement à ce que font les Propositions de Pappus, pour faciliter la lecture :

[349] Mais nous avons déjà souligné *supra* (I Présentation, fin du § 8) les considérables différences textuelles entre ces deux versions, différences qui ont certainement empêché que la parenté entre les deux preuves — perceptible essentiellement grâce à nos écritures symboliques — soit reconnue par les Anciens.



AB est le diamètre de la sphère, Γ en est le centre.

$A\Delta = 2\Delta B$;
$AB^2 = 5K\Lambda^2$;
$K\Gamma = \Gamma\Lambda$.

Différentes sections en extrême et moyenne raison sont proposées :

SEMR (BZ) en N, avec s_1 = BN ; SEMR (BM) en Ξ, avec s_1 = MΞ. Et donc :

$$BZ = a_6 \text{ et } BN = a_{12} ;\ BM = a_{20} = c_5,\ K\Lambda = \Lambda M = c_6,\ \Lambda B = AK = c_{10}$$

Le fait que KB soit coupée en extrême et moyenne raison en Λ (et que $s_1 = K\Lambda$) est une conséquence immédiate de XIII 16, utilisée dans XIII 18. Dans V 45, la construction est différente et peu naturelle (on part de $\Gamma B^2 = 5\Gamma\Lambda^2$). Peut-être faut-il y voir une conséquence de ce que Pappus remanie une version analytique dans laquelle on partait de la situation de V 48 avant de la ramener à celles de V 45-46. Quoi qu'il en soit, SEMR (KB, $s_1 = K\Lambda$) est établie autrement dans V 45, grâce à *Él.* XIII 2. Puis on remarque que :

$$(\dagger) \quad 3ZB^2 = 5K\Lambda^2\ [3(a_6)^2 = 5(c_6)^2],$$

ce qui est identique à la première étape de XIV **2** ($3\Delta H^2 = 5MN^2$), dont on déduit, grâce au Lemme SEMR :

$$\text{V 45 : } (*)\ 3BN^2 = 5\Lambda B^2 \quad \text{ou} \quad 3(a_{12})^2 = 5(c_{10})^2.$$

Dans V 46, on coupe aussi BM (= $a_{20} = c_5$) en extrême et moyenne raison en Ξ (et s_1 = MΞ), ce que ne font ni XIII 18, ni le Livre XIV. En manipulant les proportions (*Él.* V 18, 22 ; VI 1) et grâce au Lemme SEMR appliqué à BM et KB, on établit que :

$$BM^2 + M\Xi^2 : B\Lambda^2 :: AB^2 : K\Lambda^2 :: 5 : 1,$$

$$\text{soit V 46 : } \quad (**)\ BM^2 + M\Xi^2 = 5\ B\Lambda^2, \text{ ou encore : } (a_{20})^2 + [s_1(a_{20})]^2 = 5(c_{10})^2.$$

En combinant les deux Lemmes dès le début de V 48 on obtient une relation entre a_{12} et a_{20} :

$$(***) \quad BM^2 + M\Xi^2 = 3BN^2, \text{ ou encore}^{350} : (a_{20})^2 + [s_1(a_{20})]^2 = 3(a_{12})^2.$$

Mais l'égalité (**), établie dans V 46, peut se réécrire : $(c_5)^2 + [s_1(c_5)]^2 = 5(c_{10})^2$. Or le Lemme XIV **1/2** prouve que « si un pentagone équilatéral et équiangle est inscrit dans un cercle, la droite sous-tendue par deux côtés et le côté du pentagone, sont, prises ensemble, quintuples en puissance du rayon », soit, en notations modernes :

$$« (d_5)^2 + (c_5)^2 = 5(c_6)^2 ».$$

Il s'agit donc du "même" résultat, à une homothétie près, de rapport Φ (= $(\sqrt{5} + 1)/2$), car c_5 (resp. c_{10}) est le plus grand segment de d_5 (resp. c_6) dans la section en extrême et

[350] En introduisant $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2$, on peut l'écrire : $(a_{20})^2 = [(3\Phi + 3)/(\Phi + 2)](a_{12})^2$.

moyenne raison (par XIII 8 et XIII 9^{bis}, respectivement). Et la même remarque s'applique à l'égalité (*) de V 45 quand on la compare à la première étape (cf. †) de XIV **2**. À partir de là, les singularités de V 48 résident surtout dans sa construction, elle aussi différente de celle de XIII 18, qui contraint à vérifier soigneusement que BM = a_{20}.

Outre la relation (***), la preuve proprement dite mobilise les mêmes ressources que XIV **2** : les Propositions XIII 9^{bis}, 10, 12, le Lemme SEMR. Elle a également le mérite d'expliciter les identifications de droites requises pour appliquer certaines relations établies dans le Livre XIII, ainsi que les manipulations de proportions nécessaires[351], identifications et manipulations que la preuve du Livre XIV, du moins dans le texte grec transmis et probablement plus encore dans sa rédaction initiale, a court-circuité et que plusieurs scholies ont essayé de restituer.

Avec le lettrage de XIV **2** :

- Il faut reconnaître que $\Delta H = a_6$, pour pouvoir utiliser la relation métrique établie dans la troisième partie de XIII 15 (et rappelée dans XIII 18) : $AB^2 = 3\Delta H^2$; le texte grec transmis le fait dans une incise probablement inauthentique, à comparer avec les scholies 23-24, 26-27. La version Pappus V 48*aliter* ajoute une référence livresque, mais l'identification n'existe pas, à cet endroit, dans la tradition indirecte primaire[352].
- Il faut savoir que MΞ est le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle sur lequel est décrit l'icosaèdre, et dont MN est un rayon, pour que l'égalité fondamentale « $MN^2 + M\Xi^2 = K\Lambda^2$ » de XIII 10 s'applique. L'assertion existe dans la famille des manuscrits grecs ***PBVv,*** mais pas dans ***M***.
- En outre, une justification de « $M\Xi = c_{10}$ » (*i.e.* XIII 9^{bis}) a paru requise : on la trouve dans l'importante scholie 25, le Lemme 11 de Pappus et la Proposition XV **1** de la tradition arabe.
- Le rapport ΔH : HΓ est celui d'une droite coupée en extrême et moyenne raison à son plus grand segment, d'après XIII 8[353]. C'est donc le même que MN : MΞ, d'après le Lemme SEMR[354], d'où : $\Delta H : H\Gamma :: MN : M\Xi$.
- D'après VI 22, il en va de même pour les carrés :

$$\Delta H^2 : H\Gamma^2 :: MN^2 : M\Xi^2,$$

et, d'après V 15[355], pour leurs équimultiples correspondants :

$$3\Delta H^2 : 3H\Gamma^2 :: 5MN^2 : 5M\Xi^2.$$

- Par permutation : $3\Delta H^2 : 5MN^2 :: 3H\Gamma^2 : 5M\Xi^2$;
- Or $3\Delta H^2 = 5MN^2$; donc $3H\Gamma^2 = 5M\Xi^2$,

et donc :

$$3\Delta H^2 + 3H\Gamma^2 = 5MN^2 + 5M\Xi^2 = 5K\Lambda^2 \text{ (grâce à XIII 10)}$$[356].

---

351 Permutation, par V 16 ; sommation des antécédents et des conséquents, par V 12 ; passage des lignes aux carrés, par VI 22. BM : MΞ :: .

352 Voir *infra,* ANNEXE, Tableau 4, note 61.

353 Ce que rappelle la scholie 29 qui cite explicitement XIII 8. Dans notre configuration, on peut aussi utiliser le Porisme à XIII 17, ce que font les scholies 28, 30, 31 et une référence livresque dans Pappus V 48*aliter*.

354 L'identité de rapport est affirmée dans la scholie 31.

355 La scholie 31 indique ces intermédiaires, mais préfère itérer V 12 plutôt que d'utiliser directement V 15.

Bien entendu, des justifications supplémentaires du même type se retrouveront également dans toute une branche de la tradition indirecte du Livre XIV[357]. La Proposition XIV **2** constitue un bel exemple d'unité textuelle dans laquelle s'entremêlent problèmes textuels et explicitations mathématiques.

5.3 (à XIV **4**)

Dans cette Proposition, il s'agit moins d'explicitation mathématique que de (petite) corruption textuelle en grec, peut-être à l'origine d'un important remaniement rédactionnel de XIV **4** pour une branche de la tradition indirecte du Livre XIV[358]. Que le texte grec ait été altéré à la fin de XIV **4** se manifeste par trois indices :

- La conclusion générale ne coïncide pas avec l'énoncé (+ ἄρα) dans son maniement de la notion de "δυναμένη". Dans l'énoncé, conformément à l'usage euclidien (Df X 4), il s'agit de la δυναμένη d'une aire (ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ …), dans la conclusion de XIV **4**, de la δυναμένη de deux lignes (ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ … τμῆμα) et ce, dans tous les manuscrits grecs de base, mais pas dans la version Rabat + Scholie VI *in GC.*
- Pour la portion qui précède, il y a, dans lesdits manuscrits grecs, divergence entre 3 textes comme le montre ce petit tableau :

	Heiberg ~ M	***PBv***	***V***
(30)	—	ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΒΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒΔ, οὕτως εὐθείας ἡσδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.	ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ, οὕτως εὐθείας ἡσδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης τὸ ἀπὸ τῆς[359] ὅλης καὶ τὸ (τῷ) ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης τὸ ἀπὸ τῆς[360] ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.
(31)	καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε, οὕτως εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος.	καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε, οὕτως εὐθείας ἡσδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.	καὶ ὡς ἄρα ἡ Η πρὸς τὴν Ε, οὕτως εὐθείας ἡσδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.

---

356 C'est la déduction que propose la scholie 33.

357 Voir *infra,* ANNEXE, Tableau 4, notes 63-73. La preuve de XIV **2** dans la version de Gérard de Crémone est particulièrement affectée par ce genre d'enrichissements.

358 Voir *infra,* ANNEXE, Tableau 4, note 149.

359 ἀπὸ τῆς in ras., add. e corr. ***V***.

360 τὸ ἀπὸ supra scr. m. 1 ***V***.

• Autrement dit, dans ***PBVv*** on observe l'insertion d'une identification de lignes (30)[361], absente de ***M***, fausse dans ***PBv,*** puisqu'elle identifie un rapport et ce qui s'avère être son "carré". Celle de ***V*** est mathématiquement correcte, grâce à la substitution de l'expression « τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης » à « « ἡ δυναμένη ». Cette expression « τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης … » est pléonastique puisque, par définition, la δυναμένη est une droite qui peut produire un carré. Elle se trouve seulement à cet endroit et dans l'assertion (31) de ***M,*** mais ni dans la version Rabat + Scholie VI *in GC,* ni dans le compendium.

• La substitution de rapports identiques (31), produite en combinant les deux assertions précédentes, est donc également fausse dans ***PBv,*** mais pas dans ***V,*** ni dans la version Rabat + Scholie VI *in GC* dont le texte, à l'exception de l'absence de l'indéfini "ἡσδηποτοῦν", coïncide avec la version du ms ***V.***

La version Rabat + scholie *GC* N°VI (p. 441, l. 1-13) permet de restaurer un texte grec tel qu'on l'attend[362] :

> « (30) ὡς δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒΔ, οὕτως εὐθείας ἡσδηποτοῦν **ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης** τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος.
> (31) καὶ ὡς ἄρα ἡ Η πρὸς τὴν Ε, οὕτως εὐθείας **ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης** ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος ».

D'où un scénario *possible* :

• dans un ancêtre de ***MPBVv*** on a fait un saut du même [ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης (30)→ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης (31)].
D'où la séquence de ***PBv*** « $BG^2 + GD^2 : GB^2 + BD^2 :: \partial_1 : \partial_2$ », fausse, suivie de la substitution de rapports identiques qui, à partir de la proportion précédente (« $H^2 : E^2 :: BG^2 + GD^2 : GB^2 + BD^2$ »), aboutit à « $H^2 : E^2 :: \partial_1 : \partial_2$, », également fausse, à comparer avec la conclusion « $\partial_1 : \partial_2 :: a_6 : a_{20}$ (*i.e.* H : E et donc $H^2 : E^2 :: H : E$!) ».

• Les manuscrits ***MV*** ont introduit des corrections qui sont à la fois apparentées — même recours à l'hapax « τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης » —, mais en des endroits différents : ***V*** dans (30), ***M*** dans (31), puis correction de (31) dans ***V,*** suppression de (30) dans ***M.*** Du point de vue mathématique, leurs textes sont corrects.

L'expression « τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης » n'était guère évitable, sauf à annuler les effets du saut du même au même qu'il aurait fallu deviner. Cela dit, en utilisant le « carré [décrit] sur la δυναμένη », le correcteur perdait de vue la syntaxe euclidienne de “δυναμένη” et en revenait à l'usage du terme, à la fois pré-euclidien et partagé par les

[361] Ces Numéros correspondent à ceux du Tableau 4 de l'Annexe.
[362] Bien entendu il conviendrait aussi de corriger la conclusion générale.

auteurs tardifs, commentateurs de Platon et Aristote, par exemple pour l'hypoténuse d'un triangle rectangle désignée comme δυναμένη des deux côtés de l'angle droit, donc comme δυναμένη de deux lignes) »[363]. Ce qui l'a naturellement conduit à altérer aussi la conclusion générale en ce sens, écart que le traducteur de la version Rabat a pu annuler en passant à l'arabe ou que son modèle ne comportait pas. Dans ce scénario, le texte de l'ancêtre de ***MPBVv*** était donc proche de celui du modèle de Rabat.

L'existence de l'autre branche de la tradition indirecte médiévale suggère fortement l'hypothèse que les traducteurs arabes ont également eu accès à des manuscrits grecs déjà altérés. L'incohérence mathématique du texte qu'ils portent ne pouvait pas leur échapper. La solution a consisté à modifier l'ecthèse et la construction, en introduisant d'autres droites pour expliciter dès le départ les δυναμέναι des différentes aires, ce qui leur a permis de remplacer certaines proportions entre aires par des proportions entre lignes[364].

5.4 (au Lemme SEMR)

La fin du Lemme SEMR présente probablement lui aussi un (petit) problème textuel. Pour le mettre en évidence, comparons les textes des deux familles de manuscrits à la version du Livre V de la *Collectio* de Pappus dans le petit tableau ci-dessous :

	Heiberg ~ M	***PBVv* + Pappus V 44[365]**
13a	καὶ μήκει ὡς συναμφότερος ἡ ΑΒΓ	καὶ μήκει ἄρα *ὡς συναμφότερος ἡ ΑΒΓ*
b	—	προς ΑΓ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΔΕΖ πρὸς ΔΖ,
14a	—	καὶ συνθέντι
b	μετὰ τῆς ΑΓ,	*ὡς συναμφότεραι αἱ ΑΒΓ* μετὰ τῆς ΑΓ,
c	τουτέστι δύο αἱ ΑΒ,	τουτέστιν δύο αἱ ΑΒ,
d	πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΔΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ,	πρὸς ΑΓ, οὕτως συναμφότεραι αἱ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ,
15	τουτέστι δύο αἱ ΔΕ, πρὸς τὴν ΔΖ.	τουτέστιν δύο αἱ ΔΕ, πρὸς ΔΖ.
16	καὶ τὰ ἥμισυ,	καὶ *τῶν ἡγουμένων* τα ἡμιση,
17	ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ.	ὡς[366] ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΔΖ.

Dans le texte de Heiberg (***M***), le marqueur "συνθέντι" ne figure pas et la déduction est donc brutale. Nous disposons ici de trois autres témoins, respectivement grec, arabe et latin : Pappus V. 44 (418.26-31 Hultsch), la version du manuscrit de Rabat et la scholie

[363] Sur cet usage, voir [Vitrac, 2008b], en particulier pp. 119-121 et Annexe, p. 138, note 186.
[364] Les recensions d'al-Maghribī et de Campanus ont suivi la même démarche. Voir *infra,* III, § 5.
[365] Nous négligeons quelques micro-variantes dans ***PV*** qui n'importent pas pour notre propos.
[366] ὡς] ὡς τουτέστιν ***PBVv***.

VII dans *GC* (442.1-8). Tous trois, comme la famille ***PBVv,*** possèdent ledit marqueur. Il est donc raisonnable d'envisager qu'il y a eu saut du même au même dans ***M*** [συναμφότερος ἡ ΑΒΓ (13a)→ συναμφότερος(οι) αἱ(ἡ) ΑΒΓ (14b)].

Ces quatre textes sont très proches. Leur seule divergence significative réside dans les deux explicitations en τουτέστι(ν) que l'on trouve aussi bien dans ***M*** que chez Pappus (14a, 15). Mais la première manque dans ***PBVv,*** les deux sont absentes de Rabat et de la scholie latine. Ces dernières versions énoncent d'abord la proportion :

(AB+BG) + AG : AG :: (DE+EZ) + DZ : DZ,

et explicitent ensuite :

> « mais les deux lignes AB, BG avec AG sont doubles de la ligne AB et les deux lignes DE, EZ avec DZ sont doubles de la ligne DE »[367].

Dans **16**, "τῶν ἡγουμένων" est peut-être un ajout visant à préciser que les moitiés sont à prendre seulement des antécédents, et non pas pour les quatre grandeurs en proportion, ce que n'exclut pas la formulation de ***M***. Auquel cas, il faut dissocier les problèmes textuels dans **13-14** — où l'on devra suivre en partie ***PBVv*** **+** Pappus V 44 , et dans **16**, où l'on suivrait ***M*** en tant que *lectio difficilior* ?

---

[367] Cf. *infra,* ANNEXE, Tableau 4, note 193 et *GC,* 442.7-8.

ANNEXES

1. Tableau 1 : Manuscrits des *Éléments* d'Euclide (contenant la fin supposée) et manuscrits propres aux Livres XIV-XV, non postérieurs au XIV^e s.

2. Tableau 2 : Découpages du texte grec du Livre XIV

3. Tableau 3 : Structure des différentes versions arabes et latines du Livre XIV, comparées au grec

TABLEAU 1 : Manuscrits des *Éléments* d'Euclide (contenant la fin supposée) et manuscrits propres aux Livres XIV-XV, non postérieurs au XIV^{e} siècle

Bonon., Bibl. communale n°18-19 (***b***)	XI^{e}	*Él.* I-XIII + *Data* (énoncés), {Heron} *Deff.* 136, *Él.* I-XIII, *Data* 39-86	Bodl. D'orville 301 (***B***)	IX^{e}	*Él.* I-XV
Escorial Gr. 221, Φ, III. 5 (***S***)	XI^{e}	*Él.* I-XIII	Fir., Med. Laurent. 28.03 (***F***) copie de ***f* in [**XII 3 →[	XI^{e} XVI^{e}	*Él.* I-XV, *Optique*, *Phénomènes* [VII 12-IX 15 + XII 3 → fin = ***ϕ*]**
Parisin. gr. 2466 (***p***)	IX^{e}, XII^{e}	*Él.* I-XIII	Vindob. philo. gr. 103 (***V***)	XII^{e}	*Él.* I-XV, *Optique*, *Phénomènes*
Parisin. gr. 2344* (***q***)	XII^{e} ou XIII^{e}	*Él.* I-XIII			
Parisin. gr. 2345 (***r***)	XIII^{e}	*Él.* I-XIII	Vatican. gr. 1038 (***v***)	XIII^{e}	*Él.* II 8-XV, *Optique, Phénom.*1-4^{p}, Marinus + *Data,* Heron *De Mensur.*, Ptolémée, *Almageste* …
Vatican. gr. 192	XIII^{e}	*Él.* I-XIII, *Data* + Marin., scholia in *Él.*, Damien, *Opt.* + Géminus, *Opt., Catop.*, Hyps., *Anaph.,* Aristarc., *Phén.*, Aristide, *De Mus.,* Ptol. *Harm.* …	Parisin. gr. 2342	Milieu XIV^{e}	*Él.* I 32-XV, Marinus + *Data, Opt.* Damien, *Opt.* + Géminus, *Catop.*, Petite Astronomie, Apoll. *Coniques* Eut in Apoll., Sérenus
Fir., Med. Laur. 28.01	XIII^{e} ou XIV^{e}	Ptol. *Almag., Theo in* Alm. I-II ; *Él.* I-XIII, *Data*	Fir., Med. Laur. 28.06 (***f***) [copie de ***V***]	XIII^{e} ou XIV^{e}	*Él.* I-XV, *Optique*, *Phénomènes*
			Fir., Med. Laur. 28.08 (***λ***)	XIV^{e}	*Él.* I-XV, *Data*
Venise, Marcian. gr. 300	XIV^{e}	*Él.* I-XIII	Oxford, Bodl. Savile 13	XIV^{e}	*Él.* I-XV
Modène, Bibl. Estense e univ. gr. 56	XIV^{e}	*Nicom. Intr. Arithm., Philopon in Nic., Notes géom., Él.* I-XIII	Oxford, Bodl. Auct. F 6.23	XIV^{e}	*Él.* I 3-XIII + XIV^{p}, *Optique*^{p}
			Leiden, BU, Scal. gr. 36	XIV^{e}	*Él.* XI-XV

Vatican. gr. 190 (***P***)	IX^{e}	*Él.* I-XIII, Marinus + *Data*, XIV-XV, Theon Alex. *In Ptol. Tab. man. min.*
Fir., Med. Laur. 28. 02 (***l***)	XIII^{e} ou XIV^{e}	*Él.* I-XIII, *Data,* XIV-XV. Pour *Data,* XIV-XV copie de ***P***

Monacensis 427 (***M***)	XII^{e} — XIII^{e}	Proclus, *In Euclidem* I, *Él.* XIV, Marinus^{p}	Venise, Marcian. gr. 303 (***m***)	XIV^{e}	*Él.* XV^{p}, *Optique, Catoptrique,* Ptolémée, *Almageste* …

TABLEAU 2 : Découpages du texte grec du Livre XIV

Lignes in *EHS*, V, 1, 1.1—22.7	Zamberti, 1505 non paginée	Édition de Bâle, 1533, non paginée	Édition d'Oxford, 1703, pp. 431-441	Peyrard, III, 1818 pp. 481-507	Heiberg, 1888 pp. 2-36	Heath, 1921 *TBE*, iii, 512-519	BV (2011)
1.1—2.6	Préface d'Hypsiclès	Préface d'Hypsiclès	Préface d'Hypsiclès	Préface d'Hypsiclès	Préface d'Hypsiclès	Préface d'Hypsiclès	Préface d'Hypsiclès
2.7—3.18	XIV. 1	XIV. 1	XIV. 1 (p. 432)	XIV. 1 (pp. 483-5)	Section **1**	XIV. 1 (pp. 512-3)	XIV 1
3.19—4.3			XIV. 1 Por.	XIV. 1 Por.		XIV. 1^+ (p. 513)	XIV 1^+
4. 4-6	XIV. 2	XIV. 2	XIV. 2 (p. 433)	XIV. 2 (p. 485)		XIV. 2 (p. 513)	Transition 1 → 2 a = énoncé de (**Ar**) b-c = Réf. livresques d = *EPP* ($y_{12} = y_{20}$) e = Annonce
4. 6-14				(pp. 485-6)			
4. 14-17				(p. 486)			
4.18—5.16			Lemma (p. 433)	(pp. 486-7)	Section **2**	Lemma (p. 513)	Lemme XIV 1/2
5. 17-20			(pp. 433-434)	(p. 487)		(p. 514)	Énoncé de XIV 2
5.21—8.5				(pp. 487-90)	Section **3**	(pp. 514-515)	XIV 2 = (**Ar**)
8. 6-23	XIV. 3	XIV. 3	XIV. 3 (pp. 434-435)	XIV. 3 (pp. 490-2)	Section **4**	XIV. 3 (p. 515)	Lemme XIV 2/3 a
9. 1-16					Section **5**	XIV. 4 (p. 515)	XIV 2/3 b
9. 16-23	XIV. 3 Corel.		XIV. 3 Coroll. ᾿Εκ δὴ τοῦτο φ. (p. 435)	XIV. 3 Coroll.		XIV. 5 (p. 515)	XIV 2/3 c
10.1—11.11	XIV. 4	XIV. 4	XIV. 4 (pp. 435-436)	XIV. 4 (pp. 493-5)	Section **6**	XIV. 6 (pp. 515-516)	XIV 3
11. 12-17	Aliter ostendere	ἄλλως δεῖξαι, ὅτι ...	ΑΛΛΩΣ (p. 436)	Autrement (pp. 495-9)	Section **7**	Another proof	Transition 3 → 3*alit*
11.18—13.4			ΛΗΜΜΑ (pp. 436-437)			Preliminary (p. 516)	Lemme XIV 3/3*alit*
13.5—14.15	Hoc demonstratum	Τούτου δήλου ὄντος	Τούτου δήλ . (pp. 437-438)		Section **8**	Proof (p. 517)	XIV 3*alit*.
14.16—17.10	Ostendendum …	Δεικτέον ...	XIV. 5 (pp. 438-439)	XIV. 5 (pp. 499-502)	Section **9**	XIV. 7 (pp. 517-518)	XIV 4
17.11—19.4	Ostendendum …	Δεικτέον δὲ νῦν ...	XIV. 6 (pp. 439-440)	XIV. 6 (pp. 502-4)	Section **10**	XIV. 8 (p. 518)	XIV 5 (?)
19.5—20.10	… ostendemus	῞Οτι ἐὰν δύο ...	XIV. 7 (p. 440)	XIV. 7 (pp. 504-6)	Section **11**	Lemma (pp. 518-519)	Lemme SEMR
20.11—21.12	In antiquissimo codice sic (Récap. 1+2)	Δεδειγμένου ὅτι ...	Corollaire (pp. 440-441)	Corollaire (pp. 506-7)	Section **12**	Summary (p. 519)	Récapitulations, 1
21.12—22. 7		Τούτων δὴ πάντων ...	Entre [] (p. 441)	(Récap. N°2 rejetées in lectiones variant.)		(Récap. N°2 non mentionnées)	Récapitulations, 2

TABLEAU 3 : Structure des différentes versions arabes et latines du Livre XIV, comparées au grec

Grec selon BV	Rabat 1101	Compendium	Famille Téhéran 3586	Adélard I	Campanus	Gérard de Crémone
Préface d'Hypsiclès	Préface d'Hypsiclès	Préface ≠	Préface d'H. résumée	—	—	Préface d'Hypsiclès
—	—	$\boxed{\text{XIV 1 = XIII } 9^{bis}}$	—	—	—	—
XIV 1	XIV 1	XIV 2	XIV 1	XIV 1	XIV 1	XIV 1
—	—	—	—	—	—	XIV 1 *aliter*
XIV 1^+	XIV 1^+	XIV 2^+	XIV 1^+	Partie de XIV 2	XIV 1^+	XIV 1^+
—		Ajout à XIV 2^+	Ajout à XIV 1^+	Partie de XIV 2	+ ajout à XIV 1^+ = Corollarium	Ajout à XIV 1^+
Transition 1 → 2 a = énoncé de (**Ar**)	Transition 1 → 2 a = énoncé de (**Ar**)	—	—	—	—	Transition 1 → 2 a = énoncé de (**Ar**)
b-c = Réf. livresques d = *EPP* ($y_{12} = y_{20}$) e = Annonce	b-c = Réf. livresques d = *EPP* ($y_{12} = y_{20}$) e = Annonce	Transition b-c = Réf. livresques Justification ≠ Annonce ≠	Transition b-c = Réf. livresques Justification ≠ Annonce ≠	b-c = Réf. livresques (Partie de XIV 2) Justification ≠ Annonce ≠	Transition 1 → 2 b-c = Réf. livresques Justification ≠[1] Annonce ≠	b-c = Réf. livresques d = *EPP* ($y_{12} = y_{20}$) e = Annonce
—	—	—	—	—	XIV 2 (= Lemme SEMR)	—
—	—	—	—	—	$\boxed{\text{XIV 3 = XIII } 9^{bis}}$	—
XIV 1/2	XIV 1/2	XIV 3	XIV 2	Partie de XIV 2	XIV 4	XIV 2
—	—	XIV 3^+	XIV 2^+	Partie de XIV 2	XIV 4 Por.	XIV 2^+
—	—	—	—	—	—	$\boxed{\text{XIV 3 = XIII } 9^{bis}}$
XIV 2 (**Ar**)	XIV 2	XIV 4	XIV 3	XIV 3	XIV 5	XIV 4
XIV 2/3 a	XIV 2/3 a	XIV 5	XIV 4	XIV 4	XIV 6	XIV 5
XIV 2/3 b	XIV 2/3 b	XIV 6	XIV 5	XIV 5	XIV 7	XIV 6
—	—	—	—	—	—	XIV 6 *aliter*
XIV 2/3 c	XIV 2/3 c	XIV 6^+	XIV 5	XIV 6[2]	XIV 7 Por.	XIV 6^+

[1] Présentée comme une « Campani annotatio » par [Busard, 2005], p. 493.
[2] Initiative de Busard ; voir *infra,* Tableau 4, note 101. C'est XIV 5 Por. in RC & JT.

Grec selon BV	Rabat 1101	Compendium	Famille Téhéran 3586	Adélard I	Campanus	Gérard de Crémone
XIV 3	XIV 3	XIV 7	XIV 6	XIV 7[3]	XIV 8 (inclut un lemme ≠ sur semr.)	XIV 7
Transit. 3 → 3*aliter* avec énoncé	Transit. 3 → 3*aliter* avec énoncé	Transit. 3 → 3*aliter* avec énoncé	Transit. 3 → 3*aliter* sans énoncé	Transit. 3 → 3*aliter* sans énoncé	Transit. 3 → 3*aliter* sans énoncé	Transit. 3 → 3*aliter* sans énoncé
Annonce du Lemme	Annonce du Lemme	Annonce du Lemme	Annonce du Lemme	[4]	Annonce du Lemme	—
XIV 3/3*aliter*	XIV 3/3*aliter*	Partie de XIV 8	XIV 7	XIV 8[5]	Pas de N°	XIV 8
—	—	—	—	—	Notation des fractions latines	—
XIV 3*aliter*	XIV 3*aliter*	Partie de XIV 8	XIV. 8	XIV 9[6]	Pas de N°	XIV 9
XIV 4	XIV 4	Partie de XIV 9	XIV 9	XIV 10[7]	XIV 9	XIV 10
—	—	—	—	—	Lemme post-posé (constr. de ∂_1, ∂_2)	—
XIV 5	XIV 5	Partie de XIV 9	XIV. 10	XIV 11[8]	Enoncé de (**Ap.**) = XIV 10	XIV 11
—	—	—	—	—	2 Lemmes des *Sphériques*	—
—	—	—	—	—	Preuve de (**Ap.**) ~ début de la preuve de XIV 5 grec	—
Lemme SEMR	Lemme SEMR	XIV 10	XIV. 11	XIV 12[9]	—	XIV 12
Récapitulations, 1	Récapitulations, 1	—	Récapitulations, 1	XIV 12+[10]	Récapitulations	XIV 12+
Récapitulations, 2	Récapitulat. 2 (*ii-iii*)	~ Récapitulat. N°2 (*ii-iii*)	—	—		—[11]

[3] C'est XIV 6 in RC & JT.
[4] L'annonce existe in RC, mais pas in Ad. I, JT.
[5] C'est une partie de XIV 6 in RC. Manque in JT.
[6] C'est une partie de XIV 6 in RC. Manque in JT.
[7] C'est XIV 7 in RC & JT.
[8] C'est une partie de XIV 7 in RC & JT.
[9] C'est XIV 8 in RC & JT.
[10] Ajout à XIV 8 in RC & JT.
[11] Mais voir scholie VII *in GC*.

Grec selon BV	Rabat 1101	Compendium	Famille Téhéran 3586	Adélard I	Campanus	Gérard de Crémone
—	—	—	—	—	Comm. sur section en ext. & moy. raison	—
—	—	—	—	XIV 13[12] = XIII 9^{bis}	—	—
—	—	—	—	XIV 13^{bis} in Ad. I	—	—
—	—	—	—	—	Prop 11-18+	—
—	XIII 9^{bis} = XV 1	—	XIII 9^{bis} = XV 1	—	—	

(Received: April 15, 2011)

[12] C'est XIV 9 in RC & JT.