SCIAMVS 13 (2012), 3-156

Le Livre XIV des Éléments *d'Euclide : versions grecques et arabes*

(seconde partie)

Bernard Vitrac
CNRS UMR 8210, ANHIMA Paris
bernard.vitrac@gmail.com

Ahmed Djebbar
Université des Sciences et Technologies de Lille
ahmed.djebbar@wanadoo.fr

N.B. : Cette étude était trop longue pour paraître dans une seule livraison de la revue *SCIAMVS*. Nous l'avons divisée en deux portions approximativement égales et la première partie (marquée en grisée dans la table ci-dessous) a été publiée dans *SCIAMVS* 12 (2011), 29-158.

Table des matières

Première partie

Introduction 31
Abréviations et références bibliographiques 36

I Présentation des traditions directe et indirectes des livres additionnels 45
1. La tradition directe des manuscrits byzantins 45
2. Hypsiclès d'Alexandrie 52
3. Contenu, découpage et principaux résultats du Livre XIV 53
4. Retour sur la Proposition XIII 18 58
5. Les prédécesseurs d'Hypsiclès 62
6. De la monographie d'Hypsiclès au Livre XIV 63
7. La tradition indirecte grecque des témoignages 67
8. Pappus d'Alexandrie, *Collection* V : un témoignage implicite ? 71
9. Inventaire de la tradition indirecte médiévale des livres additionnels 77
10. L'origine des livres additionnels selon la tradition arabe 79
11. Un ou plusieurs traducteurs ? 83

II Trois versions du Livre XIV 85
A Tradition grecque 85
1 Description des manuscrits utilisés 85
2 Texte grec du Livre XIV 89
3 Traduction du texte grec du Livre XIV 106
4 Texte grec et traduction des scholies au Livre XIV 121
5 Notes complémentaires 145

Annexes : 153
1. Tableau 1 : Manuscrits des *Éléments* d'Euclide (contenant la fin supposée) et manuscrits propres aux Livres XIV-XV, non postérieurs au XIV^{e} s. 154
2. Tableau 2 : Découpages du texte grec du Livre XIV 155
3. Tableau 3 : Structure des différentes versions arabes et latines du Livre XIV, comparées au grec 156

Seconde partie

B Tradition arabe 5
1 Description des manuscrits utilisés 5
2 Texte arabe du Livre XIV dans la famille du manuscrit Téhéran 3586 8
3 Texte arabe du Livre XIV dans le manuscrit Rabat 1101 24
4 Traduction du texte arabe du Livre XIV dans la famille du manuscrit Téhéran 3586 35
5 Traduction du texte arabe du Livre XIV dans le manuscrit Rabat 1101 50

III Comparaison des traditions directe et indirectes 63
1. Variantes principales 63
2. La Proposition additionnelle XIII 9bis (= XV 1 arabe) 68
3. Particularités de certaines versions arabes et arabo-latines 72
4. Le compendium arabo-latin 76
5. La postérité des Livres additionnels 84

Conclusion 92

Annexes : 97
4. Tableau 4 : Comparaison locale de 3 versions du Livre XIV (Grec, ***PBVv*** / Arabe, Rabat 1101 / Arabe, famille du Téhéran 3586) 98
5. Tableau 5 : Statistique par famille et par unités textuelles 139
6. Tableau 6 : Comparaison de trois versions du Lemme XIII 9bis 140
7. Variantes dans les diagrammes du Livre XIV 143

II TROIS VERSIONS DU LIVRE XIV

B Tradition arabe

1. Description des manuscrits utilisés

M Ms. Téhéran, Malik 3586, 343H/954, 244 f° (non numérotés). Une partie manquante se trouve dans le ms. Téhéran Dānishgāh 2120. Elle correspond aux f° 92a-97b.

19 lignes par page, écriture naskhī ordinaire sans points diacritiques ni voyelles. Pas de colophon. Le nom du copiste n'est pas mentionné. Le manuscrit contient :

- Les Livres I-XIII des *Éléments* et les livres XIV et XV attribués à Hypsiclès
- Quelques corrections, d'une autre main, ont été ajoutées en marge
- La copie contient l'introduction dictée par Thābit Ibn Qurra à Isḥāq (f°4b-9a)[1]
- Après le f° 185b, ont été ajoutés deux feuillets de format plus petit (9x11, 5 cm.) contenant une seconde version des définitions du Livre XI, écrite de la même main[2].

Le Livre XIV a pour titre : « *Le quatorzième livre d'Hypsiclès ajouté au livre d'Euclide sur les Eléments, traduction de Qusṭā Ibn Lūqā* » (f° 233b). À la fin (f° 241a), on lit : « *S'est achevé le quatorzième <livre> d'Hypsiclès, attribué à Euclide* ». Le Livre XV a pour titre : « *Le quinzième propos d'Hypsiclès sur la complétion du propos sur les cinq solides* » (f° 242b). La seconde partie du Livre XIV est écrite par une autre main (à partir de la fin de la proposition 2). La proposition 1, la transition 1/2 et la proposition 2, du Livre XIV, sont numérotées (alphabétiquement, de 1 à 3), dans la marge.

Deux gloses marginales sont ajoutées, respectivement aux f° 231b et 232b. Elles sont signalées et reproduites dans l'apparat critique (II, B, § 2, notes 54 et 72). Traductions : II, B, § 4, notes 336 et 338, respectivement.

Les propositions et les lemmes sont accompagnés de diagrammes dont le tracé n'est pas toujours visible, placés dans des indentations sauf celles à XIV **1**/**2** (bas de page) et à XIV **2**, **4** qui occupent toute la largeur.

---

[1] Introduction, édition et traduction française dans [Djebbar, 2003], pp. 299-315.
[2] Éditées, avec traduction française, dans [Djebbar, 2008], pp. 372-376.

J Ms. Téhéran, Majlis Shūra 200, date inconnue, 226 f°.
18 lignes par page, belle écriture naskhī, avec les points diacritiques et sans voyelles. Pas de colophon. Le nom du copiste n'est pas mentionné. Le manuscrit contient :

- Les Livres I-XIII des *Éléments* et les livres XIV et XV attribués à Hypsiclès
- Le Livre XV est suivi (de la main du même copiste) des *Sphériques* de Théodose dans la révision de Muḥyī ad-Dīn al-Maghribī (XIII^{e} s.) puis de la *Sphère en mouvement* d'Autolycos.
- La manuscrit contient aussi le commentaire au Livre II d'Al-Kūhī (27 Propositions).

La copie ne contient ni gloses ni corrections marginales. La numérotation des différentes parties du Livre XIV est dans le corps du texte. Elle est alphabétique et va de 1 à 12. Les figures et leur lettrage sont réalisés avec soin. Une seule figure est répétée (f. 220b et 221a)

U Ms. Uppsala, University Library, O Vet 20 (Tornberg 321), 434 H/1042, 202 f°.
23 lignes par page, écriture naskhī ordinaire, avec les points diacritiques et sans voyelles. Le manuscrit contient :

- les Livres I-XIII des *Éléments* et les livres XIV et XV attribués à Hypsiclès. Au f° 1^{r}, on lit : « *Livre des Eléments d'Euclide, révision de Thābit Ibn Qurra le Sabéen, le Harranien, et les deux livres d'Hypsiclès qui leur sont ajoutés, qui sont attribués à Euclide, <dans la> traduction de Qusṭā Ibn Lūqā de Baalbek* ».
- Le Livre XV a pour titre : « *Le quinzième Livre d'Hypsiclès, ajouté au livre des Eléments d'Euclide, traduction de Qusṭā Ibn Lūqā* » (f° 199b).
- Le Livre XIV (ff. 193a-199b) contient une seule glose marginale qui s'avère être une intéressante correction. Elle est signalée et reproduite dans l'apparat critique (II, B, § 2, note 131). Voir aussi II, B, § 4, note 341 et ANNEXE, Tableau 4, note 120.

Il contient une numérotation alphabétique, en marge, qui va de 1 à 11. Les diagrammes des Livres XIV et XV, placés dans des indentations, sont réalisés avec soin.

R Ms. Rabat, Ḥasaniyya 1101, 683 H/1284, 125 f°.
29 lignes par page, écriture andalouse très fine. Le nom du copiste existe, mais il est illisible. Le manuscrit contient :

- Les Livres I-XIII des *Éléments*
- Le Livre XIV, attribué à Hypsiclès
- Le Livre XV, avec le titre : « *Le quinzième livre du traité des Eléments* » (f° 123b).

- Dans les Livres I-XIII, la copie contient aussi des passages attribués à l'une des traductions d'al-Ḥajjāj[3].

Le Livre XIV (ff. 120a-123a) contient, en marge, une numération alphabétique qui va de 1 à 8. Il ne contient aucune glose marginale. Les diagrammes des Livres XIV et XV, placés dans des indentations, sont réalisés avec soin.

Bien que nous n'utilisions pas cette copie pour établir le texte de nos deux versions arabes, nous mentionnerons également le manuscrit suivant, dont nous discuterons brièvement certaines caractéristiques :

E Ms. Madrid, Escorial, non daté, VII^{e} s. H/XIII^{e} s (?), 184 f°.

29 lignes par page, écriture andalouse très fine. À la fin du manuscrit (f. 184a), on ne trouve ni le nom du copiste ni la date de la copie. Le manuscrit contient :

- les Livres I-XIII des *Éléments* (ff° 1a-176a)
- Le Livre XIV avec le titre : « *Le quatorzième livre* » (ff° 176b-181b)
- Le Livre XV avec le titre : « *Le quinzième livre* » (ff° 182a-184a).

Il contient deux corrections d'une autre main qui sont en marge (f. 176b) mais aucune autre glose marginale. Il n'y a aucune numérotation des propositions, des transitions et des lemmes. Les diagrammes des Livres XIV et XV, placés dans des indentations, sont réalisés avec soin.

NB : Comme pour la partie grecque, le lecteur trouvera ici deux types de diagrammes, selon qu'il consulte les textes arabes ou les traductions françaises. Pour celles-ci, nous proposons des diagrammes mathématiquement et métriquement corrects. Pour les éditions, nous avons préféré conserver certains traits saillants des figures transmises par les manuscrits qui ne suivent pas nécessairement ce principe de représentation “exacte”. Notre lecteur aura donc un accès minimal à ce genre d'informations, étant entendu qu'il ne s'agit pas de reproductions “photographiques” des diagrammes portés par les manuscrits. L'annexe 7 offrira quelques informations supplémentaires sur les variations diagrammatiques que nous avons observées.

[3] Voir [De Young, 1991].

2. Texte arabe du Livre XIV dans la famille du manuscrit Téhéran 3586

المقالة الرابعة عشرة لابسقلاوس المضافة إلى كتاب أوقليدس في الأصول ، ترجمة قسطا بن لوقا[4]

إن باسليدس[5] الصوري[6]، يا بروطارك[7]، لما صار إلى الإسكندرية أقام بها مع أبينا أكثر مقامه[8] من أجل مجانسته[9] التعاليم. فكانا يفحصان عن[10] كتاب أبلونيوس[11] الذي على إعطاء[12] نسبة[13] ذي الاثنتي[14] عشرة[15] قاعدة إلى ذي العشرين قاعدة. وكانوا يتوهمون أن أبلونيوس لم يصححها. فكتبوها ونقّوها[16] على ما كان يسمع من الأب.

ثم إني أصبت، من بعد ذلك، مصحفًا //J: 217ظ// آخر كتبه أبلونيوس[17] فيه براهين صحيحة على إعطاء مناسبة ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى ذي العشرين قاعدة المرسومين في كرة واحدة. فسررت بذلك سرورًا //M: 231و// عظيمًا لما في ذلك من الدرك لأمور جليلة. وقد يشبه أن يكون غرض أبلونيوس في ذلك كليا[18] لأنه يستدير[19] بعضه على بعض كالأشياء الكلية.

وقد رأيت[20] أن أفضي إليك بالذي كتبناه[21] في ذلك من بعد تعب شديد، ورأيُنا أن تُعلّمه[22] تذكرة للأشياء[23] التي يعول[24] فيها بتجربة، لقيادتك[25] في كل التعاليم ولا سيما[26] في الهندسة، وأن أفصل لك ذلك، محبة وعناية[27]، لإلفك الأب وحسن رأيك فينا، وهذا حين نبتدئ الكتاب الذي قدمنا ذكره.

[4] – المقالة الرابعة عشر لابسقلاوس المضافة إلى كتاب أوقليدس في الأصول ، ترجمة قسطا بن لوقا. M: المقالة الرابعة عشر المنسوبة إلى اسقلاوس واوقليدس في الأصول ترجمة قسطا / J: المقالة الرابعة عشرة. بسم الله الرحمن الرحيم.

[5] – باسليدس. M: باسليديس.

[6] – الصوري. M: ناقصة.

[7] – بروطارك. M: با فرسطا / J: ناقروطارشا/ U: ثوفرسطا.

[8] – M: أكثر مقامه / J: أكثر زمان غيبته.

[9] – مجانسته. M، J، U: مجانسه.

[10] – يفحصان عن كتاب. J: يفصحان كتاب.

[11] – أبلونيوس. M: افلونيس . ثم صححت في الهامش. وهكذا فيما بعد / J: اقلونيس / U: افلونيوس. وهكذا فيما بعد.

[12] – إعطاء. M، J: إعطا. وهكذا فيما بعد.

[13] – نسبة. M، U: نسب.

[14] – الاثنتي. M، J، U::الاثنى. وهكذا فيما بعد.

[15] – عشرة. M، J، U: عشر. وهكذا فيما بعد.

[16] – فكتبوها ونقوها. M: وكتبوها ونقوها / J: فنقلوها وكتبوها.

[17] – أبلونيوس. M: افلوسوس / J: افلونيس. وهكذا فيما بعد.

[18] –كليًا. M، U: كلي / J: كلنا.

[19] – يستدير. M، U: مستدير.

[20] – رأيت. M: أردت.

[21] – بالذي كتبناه. M، U: بالذي كتبنا.

[22] – تعلمه. U: تعمله.

[23] – للأشياء. M: في الأشيا. ثم صححت في الهامش / J: في الأشيا / U: في الأشيا.

[24] – يُعول. M: نقول / J، U: سنقول.

[25] – لقيادتك. M، U: ليفادك / J: ليعادل.

[26] – ولا سيما. U: سيما.

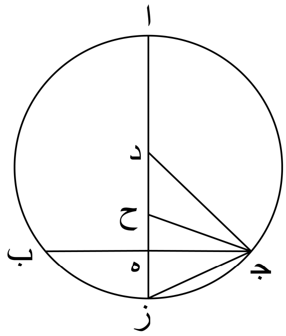
[27] – محبة وعناية. M: لمحبة عناية / J: بعناية ومحبة / U: لمحبة وعناية.

ا [المبرهنة 1]

كل عمود يخرج من مركز الدائرة إلى ضلع المخمّس الذي في الدائرة، فهو مثل نصف ضلع المعشّر ونصف ضلع المسدس اللذين يكونان في الدائرة جميعًا.

مثال ذلك

أن ضلع مخمّس دائرة ا ب جـ خط ب جـ، والعمود الخارج من مركز الدائرة إلى ضلع المخمّس خط د هـ، ود مركز الدائرة. ونخرج خط د هـ على استقامة إلى نقطة ز من محيط الدائرة. ونخرج خط جـ ز. فقوس[28] جـ ز نصف[29] قوس[30] جـ ب[31]. وقوس[32] جـ ب[33] خُمُس الدائرة //U: 193ظ//. فقوس جـ ز عُشر الدائرة. ود هـ ز[34] وتر سُدُس الدائرة. فأقول إن خط د هـ مثل نصف خط[35] د ز ونصف خط جـ ز جميعًا.



برهان ذلك

أنا[36] نخرج خط د جـ ونفصل من خط د هـ خط هـ ح، مساويًا لخط هـ ز، ونصل جـ ح. فجميع محيط الدائرة خمسة أمثال قوس جـ ز ب، وقوس ا جـ ز نصف الدائرة، وقوس جـ ز نصف قوس جـ ز ب. فقوس ا جـ ز خمسة أمثال[37] قوس جـ ز. فقوس ا جـ أربعة أمثال قوس جـ ز. فزاوية ا د جـ أربعة أمثال زاوية ز د جـ. وزاوية[38] ا د جـ مثلا زاوية د ز جـ لأنها خارجة من مثلث د ز جـ. فزاوية د ز جـ مثلا زاوية ز د جـ. وز هـ مثل هـ ح وزاية ح هـ جـ قائمة //M:231ظ//. فخط //J: 218و// جـ هـ عمود على ح ز. فخط جـ ح مثل جـ ز وزاوية جـ ح ز مثل زاوية ح ز جـ. فزاوية جـ ح ز مثلا زاوية جـ د ز، وهي خارجة من مثلث جـ د ح. فزاوية د جـ ح مثل زاوية جـ د ح. فخطا د ح، جـ ح متساويان. فخط د ح مثل خط جـ ز. وح هـ مثل هـ ز. فجميع هـ ز، ز جـ[39] مثل جميع د ح ، ح هـ[40]. فجميع د ز، ز جـ[41] مثلا د هـ. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

---

[28]– فقوس جـ ز. M: الكلمة في الهامش / J، U : قَ جـ ز.

[29]– نصف. M: كنصف.

[30]– قوس. M: الكلمة في الهامش.

[31]– جـ ب. U: جـ ز ب.

[32]– قوس. M: الكلمة في الهامش / J، U: الكلمة ناقصة.

[33]– جـ ب. U: جـ ز ب.

[34]– د هـ ز. J، U : د ز.

[35]– خط. M، U: الكلمة ناقصة.

[36]– أنا. M: أن.

[37]– أمثال. M: أضعاف.

[38]– فزاوية ا د جـ أربعة أمثال زاوية[38] ز د جـ وزاوية. U: بعض كلمات الجملة مطموسة.

[39]– هـ ز، ز جـ. M : هـ ز ح / J: هـ ز ح ز / U: هـ ز جـ.

[40]– د ح، ح هـ. M، J، U: د ح هـ.

[41]– د ز، ز جـ. M: د هـ ز، ز ح.

وقد[42] تبين في المقالة الثالثة عشرة[43] أن العمود الخارج من مركز الدائرة إلى ضلع مثلث الدائرة هو نصف الخط المخرج من مركز الدائرة إلى محيطها[44]. فالعمود الخارج من المركز إلى ضلع المخمس هو مساو للعمود الخارج من المركز إلى ضلع المثلث وإلى[45] نصف ضلع المعشر جميعًا[46].

[انتقال من المبرهنة 1 إلى المبرهنة 2]

ومن أجل أنّا نريد أن نبين ما[47] ذكر أرسطاوس، في المصحف المرسوم عليه تبيين[48] مقاييس[49] الخمسة الأشكال[50]، وأبلونيوس[51]، في الإعطاء الثاني في[52] مناسبة ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى ذي العشرين قاعدة، إذ يقول إن نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى ذي العشرين قاعدة، من أجل أن الخط المخطوط من مركز دائرة المخمس، الذي لذي الاثني قاعدة، إلى خطها المحيط، مثل المخطوط من مركز دائرة مثلث //U: 194و// ذي العشرين قاعدة، ينبغي لنا أن نقدم، قبل ذلك، ما يصح به هذا القول. فنقول:

ب[53] [المأخوذة 2/1]

إن مربّع[54] ضلع المخمس ومربّع الضلع الذي[55] //M: 232و// يوتر زاوية المخمس الذي يقع في الدائرة، جميعًا، خمسة أمثال مربّع نصف قطر الدائرة.

مثال ذلك[56]:

أن دائرة ا ب ﺟ قد أخرج فيها ضلع مخمس، وهو خط ب ﺟ. وأخرجنا قطر ا د ﻫ ز يقطع ب ﺟ بنصفين عند نقطة ﻫ[57]، ووصلنا ﺟ، ز. فخط ﺟ ز وتر عُشر الدائرة. فقوس ﺟ ز قوس عُشر الدائرة.[58] فيبقى قوس ا ﺟ خمسي الدائرة. فخط ا ﺟ يوتر زاوية المخمس. فأقول إن مربّع ا ﺟ ومربّع ﺟ ب جميعًا خمسة أمثال مربع د ز.

---

[42]– وقد. M: زيد في الهامش وفي نفس السطر الرقم الأبجدي "ب".

[43]– المقالة الثالثة عشرة. M، U: القول الثالث عشر.

[44]– محيطها. J: خطها المحيط.

[45]– إلى. M، U: مثل / J: الكلمة ناقصة.

[46]– جميعًا. U: جميعًا أيضا.

[47]– نريد أن نبين ما ذكر. M: إنما ذكر/ J: تريد ما ذكر.

[48]– تبيين. M: تمييز / J: تبين.

[49]– تمييز المقاييس. M: الكلمتان في الهامش.

[50]– الخمسة الأشكال. J: الأشكال الخمسة جميعا.

[51]– أبلونيوس. U: افلونيس.

[52]– في. M، J، U: من.

[53]– ب. M: الرقم ناقص.

[54]– مربّع. M: الكلمة في الهامش.

[55]– "وجدنا هذا في نسخة أخرى : يا زوزم، إن العمود الخارج من مركز الكرة إلى المخمّس الذي هو قاعدة لذي الإثني عشر قاعدة مساو للعمود المخرج من مركز الدائرة إلى المثلث الذي هو قاعدة ذي العشرين قاعدة لأن الدائرة التي تحيط بمخمّس ذي اثني عشر قاعدة مساوية للدائرة التي تحيط بمثلث ذي عشرين قاعدة كما سنُبَيِّن فيما بعد. والدوائر المتساوية التي على الكرة تكون الأعمدة الخارجة من مركز الكرة على سطوحها مساوية. فإذاً ا الأعمدة الخارجة من مركز الكرة إلى مخمّس ذي اثني عشر قاعدة وإلى مثلث ذي عشرين قاعدة متساوية". M: الفقرة في الهامش.

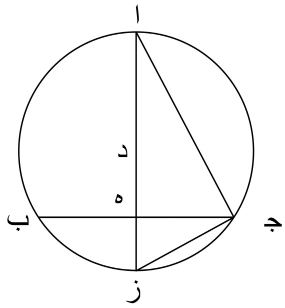
[56]– مثال ذلك. J: مثاله.

[57]– عند نقطة ﻫ. J: على ﻫ.

[58]– فقوس ﺟ ز قوس عُشر الدائرة. M: الجملة في الهامش / J، U : الجملة ناقصة.

برهان ذلك:

أن د ز نصف ا ز. فمربّع ا ز أربعة أمثال مربع د ز. ومربع //J: 218ظ // ا ز مثل مربع ا جـ ومربع جـ ز جميعا، لأن زاوية ا جـ ز قائمة. فمربعا ا جـ، جـ ز، جميعًا، أربعة أمثال مربع د ز. وليكن مربع د ز مشتركًا. فمربع ا ز ومربع د ز، جميعًا، خمسة أمثال مربع د ز. ومربع ا جـ ومربع جـ ز ومربع د ز، جميعًا، خمسة أمثال مربع د ز[59]. وخط جـ ب، الذي هو وتر الخُمُس، يقوي على جـ ز، الذي هو وتر العُشر، وعلى د ز، الذي هو وتر السُّدس، جميعًا. فمربع ا جـ ومربع جـ ب، جميعًا، مثل مربع ا جـ[60] ومربع جـ ز ومربع د ز، جميعًا. فمربعا ا جـ، الذي يوتر زاوية المخمّس، وجـ ب، الذي هو وتر الخُمُس، جميعًا، خمسة أمثال مربع د ز. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.



والذي يوتر زاوية مخمّس ذي الاثنتي عشرة قاعدة، الذي في الكرة، هو ضلع المكعب الذي في الكرة. فقد تبيّن أن مربع ضلع المكعب الذي في الكرة ومربع ضلع مخمس ذي الاثنتي عشرة قاعدة الذي في الكرة، جميعًا، خمسة أضعاف مربع نصف قطر الدائرة التي تحيط بمخمس[61] ذي الاثنتي عشرة قاعدة الذي في الكرة //M: 232ظ//.

جـ [المبرهنة 2]

نريد أن نبين أن[62] مخمّس ذي الاثنتي عشرة قاعدة ومثلث ذي العشرين قاعدة المخطوطين في كرة واحدة تحيط بهما دائرة واحدة.

مثال ذلك

أن نفرض قطر الكرة ا ب، //U: 194ظ// ونرسم فيها ذا الاثنتي عشرة قاعدة وذا العشرين قاعدة. وليكن مخمّس ذي الاثنتي عشرة قاعدة مخمّس جـ د هـ و ز، ومثلث ذي العشرين قاعدة مثلث ط ي ك. فأقول إن الدائرة التي تحيط بمخمّس[63] جـ د هـ و ز مساوية للدائرة التي تحيط بمثلث ط ي ك.

برهان ذلك

أنّا نصل د ز ونخط خط ل م مستقيما ونفرض مربّعه خمس مربّع خط ا ب، وقد تبيَّن في القول الثالث عشر أن مربّع نصف قطر الدائرة التي ضلع مخمّسها هو ضلع مثلث ذي العشرين قاعدة المرسوم في الكرة مثل خمس مربّع قطر الكرة. فخط ل م نصف قطر الدائرة التي ضلع مخمّسها ضلع مثلث //J: 219و// ذي العشرين قاعدة.

ونقسم خط ل م على نسبة ذات وسط وطرفين ويكون القسم الأعظم ل ن[64] والأصغر م ن. فخط ل م[65] وتر سدس الدائرة و ل ن[66] وتر عشرها، ومربّع خط ا ب ثلاثة[67] أمثال مربّع د ز، لأن د ز ضلع مكعب الكرة المخطوطة على قطر ا ب. فثلاثة أمثال مربع د ز مساو

---

[59]– ومربع ا جـ ومربع جـ ز ومربع د ز جميعًا خمسة أمثال مربع د ز. M: الجملة ناقصة.

[60]– ومربع جـ ب، جميعًا، مثل مربع ا جـ. M: الجملة مُكرّرة.

[61]– بمخمس. M: لمخمس.

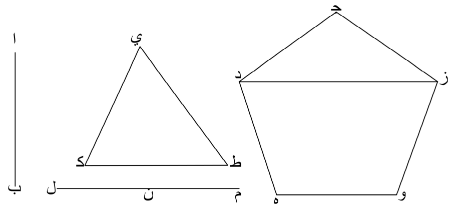
[62]– أن. M: الكلمة ناقصة.

[63]– بمخمّس. M: لمخمّس.

[64]– ل ن. M: قسم ل ن.

[65]– ل م. M: ل ن / J: م ل.

لخمسة[68] أمثال مربع ل م[69]. وقد تبيّن، في القول الثالث عشر، أن الخط الذي يُوتِّر زاوية المخمّس، إذا فُصِل منه مثل[70] ضلع المخمّس، كان ذلك الخط قد انقسم على نسبة ذات وسط وطرفين. والقسم الأعظم هو ضلع المخمّس. فنسبة خط ﺟ د إلى خط د ز كنسبة خط ل ن إلى خط ل م. فالذي يكون من خمسة أمثال مربّع ل م وخمسة أمثال مربّع ل ن جميعًا مثل الذي يكون من ثلاثة أمثال مربّع د ز وثلاثة أمثال مربّع ﺟ د جميعًا[71]. وضلع ي ط يقوي على ضلع ل م وضلع ل ن. فخمسة أمثال مربع ي ط مساو لثلاثة أمثال مربع د ز وثلاثة أمثال مربع ﺟ د جميعًا[72].



وقد تبيَّن، في القول الثالث عشر[73]، // M: 233و// أن وتر المثلث يُقوّي على ثلاثة أمثال نصف القطر. فمربّع خط ي ط ثلاثة أمثال مربّع[74] نصف قطر الدائرة التي تحيط بمثلث ي ط ك[75]. فخمسة أمثال مربّع ي ط مساو لخمسة عشر مثلا لمربّع نصف قطر الدائرة المحيطة بمثلث ي ط ك[76]. وقد بيّنّا، في هذه المقالة، أن مربّع ضلع المخمّس ومربّع ضلع الذي يُوتّر زاوية المخمّس، جميعًا، خمسة أمثال //U: 195و// مربّع نصف قطر الدائرة التي تحيط بالمخمّس. فثلاثة أمثال مربّع د ز[77] وثلاثة أمثال مربّع ﺟ د[78] خمسة عشر مثلا لمربّع نصف[79] قطر الدائرة التي تحيط بمخمّس ﺟ د ﻫ و ز. فخمسة عشر مثلا لمربّع نصف قطر الدائرة المحيطة بمثلث ك ط ي مساو[80] لخمسة عشر مثلا لمربّع نصف قطر الدائرة المحيطة[81] بمخمّس ﺟ د ﻫ و ز. فنصف قطر دائرة ﺟ د ﻫ و ز مثل نصف قطر دائرة ي ط ك. فالدائرتان[82] متساويتان. وذلك ما //J:219ظ// أردنا أن نُبيِّن.

---

[66]– ل ن. M، J: م ن.

[67]– ثلاثة. M: ثلثة. وهكذا فيما بعد.

[68]– مساو لخمسة. M: وهو مساو لخمسة / J: خمسة.

[69]– لأن د ز ضلع مكعب الكرة المخطوطة على قطر ا ب. فثلاثة أمثال مربع د ز. M: الجملة ناقصة.

[70]– مثل. M: الكلمة ناقصة.

[71]– جميعا. J، U: الكلمة ناقصة.

[72]– وضلع ي ط يقوي على ضلع ل م وضلع ل ن. فخمسة أمثال مربع ي ط مساو لثلاثة أمثال مربع د ز وثلاثة أمثال مربع ﺟ د جميعا. M: الجملة ناقصة.

[73]– "إن أصل هذا هكذا: لأن كل خطين ينقسم كل واحد منهما على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن نسبة الخط إلى الخط كنسبة القسم الأعظم من أحدهما إلى القسم الأعظم من الآخر. فإذًا ا نسبة مربّع ل م إلى مربّع د ز كنسبة مربّع ل ن إلى مربّع ﺟ د. فتكون نسبة جميع المقدّمات إلى جميع التوالي كنسبة واحد من المقدّمات إلى واحد من التوالي. فإذاً ا نسبة مربّع ل م مع مربّع ل ن إلى مربعي د ز، د ﺟ كنسبة مربّع ل م إلى مربّع د ز. ولأن مربّع ل م خمُس مربّع قطر الكرة ومربّع د ز ثُلثُه، تكون نسبة مربّع ل م إلى مربّع د ز كنسبة الخُمُس إلى الثلُث. فإن نسبة مربّعي ل م، ل ن إلى مربّعي د ز، د ج كنسبة الخُمُس إلى الثلُث. فإذًا خمسة أمثال مربّعي ل م، ل ن مساوية لثلاثة أمثال مربّعي دز د ﺟ". M: الفقرة في الهامش.

[74]– مربع. U: الكلمة ناقصة.

[75]– ي ط ك. M: ب ط ل. وهكذا فيما بعد.

[76]– ي ط ك. U: ط ي ك.

[77]– د ز. M: ﺟ ز.

[78]– ﺟ د. M: ﺟ ز.

[79]– مثلا لمربّع نصف. M: مثلا مثل مربع نصف / J، U: مثلا لنصف.

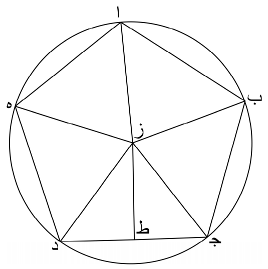
[80]– مساو. M: مساوي.

[81]– المحيطة. M: المحيط.

[82]– فالدائرتان. M: والدائرتان.

د[83] [المأخوذة a3/2]

المربع الذي يساوي[84] ثلاثين[85] مثلا للمُسطّح[86] الذي يكون من ضرب العمود المخرج من مركز الدائرة، التي تحيط بمخمّس ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى ضلع المخمّس، في ضلع المخمس، مساو لسطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة.



مثال ذلك

أن دائرة ا ب جـ د هـ تحيط بمخمس[87] ذي الاثنتي عشرة قاعدة، وهو مخمس ا ب جـ د هـ. ومركز الدائرة نقطة ز. وقد أخرج منها عمود إلى نقطة ط من خط جـ د. فأقول إن جـ د في ط ز، //M: 233ظ// ثلاثين مرة، مساو لسطح ذي الاثنتي عشرة[88] قاعدة الذي[89] مخمسه مخمس ا ب جـ د هـ.

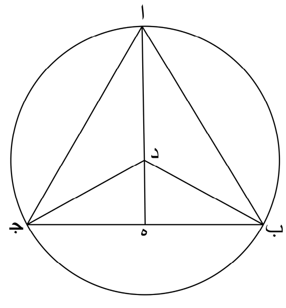
برهان ذلك

أن جـ د في ط ز مثلا مثلث ز جـ د. فخط جـ د في خط ز ط خُمُس[90] ضعف مخمس ا ب جـ د هـ. وسطح ذي[91] الاثنتي عشرة قاعدة اثنا[92] عشر[93] مرة مثل ا ب جـ د هـ. فستة في ضعف مخمّس ا ب جـ د هـ هو ستة أمثال الذي يكون من ضرب جـ د في[94] ز ط خمس مرات. فَـ جـ د في[95] ز ط، ثلاثين مرة، مثل سطح ذي الاثني عشر قاعدة[96]. وذلك ما أردنا أن نُبيّن. //U: 195 ظ//

83– د. M: الرقم ناقص.
84– يساوي. M: مساوي.
85– ثلاثين. M: ثلثين. وهكذا فيما بعد.
86– للمسطح. M، J، U: للمربع.
87– بمخمس. M: مخمس.
88– الاثني عشر. M: الاعشر.
89– الذي. M: الى.
90– خُمُس. M، J، U: خمس مرات.
91– سطح. M: الكلمة ناقصة.
92– اثنا. M، J، U: اثنى. هكذا فيما بعد.
93– إثني عشر. M: اى عشر.
94– في. M: وي.
95– في. M: ي.
96– فستة في ضعف مخمّس ا ب جـ د هـ هو ستة أمثال الذي يكون من ضرب جـ د في ز ط خمس مرات. فَـ جـ د في ز ط، ثلاثين مرة، مثل سطح ذي الاثني عشر قاعدة. J، U: فستة في ضعف مخمّس ا ب جـ د هـ عشر اثنتا مرة مثل ا ب جـ د هـ. وستة في ضعف مخمس ا ب جـ د هـ هوثلاثون مرة مثل الذي يكون من ضرب جـ د في ز ط. فـ جـ د في زط، ثلاثين مرة، مثل سطح ذي الاثني عشرة قاعدة.

هـ[97] [المأخوذة b3/2]

وكذلك المربّع الذي يساوي ثلاثين مثلا للمربع الذي يكون من ضرب العمود الخارج من مركز هذه الدائرة إلى ضلع المثلث الذي يكون فيها، وهو مثلث ذي العشرين قاعدة الذي تحيط به[98] الكرة التي تحيط بذي الاثنتي عشرة قاعدة الذي تحيط هذه الدائرة بمخمّسها، في ضلع المثلث، مساو لسطح ذي العشرين قاعدة.



مثال ذلك

أن دائرة ا ب ج تحيط بمثلث ذي العشرين قاعدة، وهو مثلث ا ب ج. ومركز الدائرة نقطة د. وقد أخرج منها عمود إلى نقطة هـ من خط ب ج. فأقول إن مضروب ب ج في د هـ، ثلاثين[99] مرة، مثل سطح ذي العشرين قاعدة الذي تحيط بمثلثه دائرة ا ب ج.

برهان ذلك

أن مضروب د هـ[100] في ب ج مثلا مثلث[101] د ب ج[102]. فخط د هـ //J: 220و// في ب ج ثلاث مرات مثلا مثلث ا ب ج. ود هـ في ب ج ثلاثين مرة مساو لعشرين مثلا لمثلث ا ب ج[103]. وعشرون[104] مثلا لمثلث ا ب ج مساو لسطح[105] ذي العشرين قاعدة التي مثلثها[106] ا ب ج. فخط د هـ[107] في خط ب ج، ثلاثين مرة، مساو لسطح ذي العشرين قاعدة. وذلك ما أردنا أن نُبيِّن //M: 234و//.

[المأخوذة c3/2]

فنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة جزء سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة من ثلاثين إلى جزء سطح ذي العشرين قاعدة من ثلاثين. فنسبة سطح ذي الاثني عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة السطح الذي يكون من ز ط في د ج إلى السطح الذي يكون من د هـ في ب ج.

فقد تبيّن أن نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة، اللذين في كرة واحدة، كنسبة المربّع الذي يكون من العمود الخارج من مركز الدائرة، التي تحيط بمخمّس[108] ذي الاثنتي عشرة قاعدة، إلى ضلع المخمّس، في ضلع المخمّس، إلى الذي يكون من العمود

97– هـ. M: الرقم ناقص.
98– الذي تحيط به. M: التي تحيط بها.
99– ثلاثين. M: عشرين.
100– د هـ. M: د ب.
101– مثلث. M: لمثلث.
102– د ب ج. U: د ج ب.
103– فخط د هـ في ب ج ثلث مرات مثلا مثلث ا ب ج. ود هـ في ب ج ثلاثين مرة مساو لعشرين مثلا لمثلث ا ب ج. M: الجملة ناقصة.
104– عشرون. M، J: عشرين.
105– مساو لسطح. M: مساوي سطح.
106– مثلث. M: مثلها.
107– وعشرون مثلا لمثلث ا ب ج مساو لسطح ذي العشرين قاعدة التي مثلثها ا ب ج. فخط د هـ. U: الجملة ناقصة.
108– التي تحيط بمخمس. M: إلى محيط مخمس.

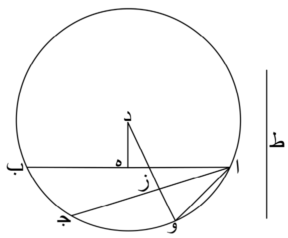
الخارج من //U: 196و// مركز الدائرة إلى ضلع مثلث ذي العشرين قاعدة، الذي تحيط به تلك الكرة، في ضلع المثلث. وذلك ما أردنا أن نُبيِّن[109].

و[110] [المبرهنة 3]

نريد أن نُبيّن أن نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة اللذين[111] تحيط بهما كرة واحدة، كنسبة ضلع المكعّب، الذي تحيط به تلك الكرة، إلى ضلع مثلث ذي العشرين قاعدة.

مثال ذلك

أن نرسم دائرة ا ب جـ تحيط بمثلث ذي العشرين قاعدة، وضلعه ا ب، وبمخمّس ذي الاثنتي عشرة قاعدة وضلعه خط ا جـ، ومركز الدائرة نقطة د. ونخرج عموداً من د إلى نقطة هـ من خط ا ب. ونخرج، من د أيضًا، عموداً إلى نقطة ز من خط ا جـ، ونخرجه[112] على استقامة إلى نقطة و من خط[113] محيط الدائرة. ونصل ا و[114]، ونرسم ضلع المكعب الذي تحيط به الكرة التي تحيط بذي //M: 234ظ// الاثنتي عشرة قاعدة وذي العشرين //J: 220ظ// قاعدة اللذين ضلع ذي العشرين قاعدة منهما خط ا ب وضلع ذي الاثنتي عشرة قاعدة منهما ضلع ا جـ، وهو خط ط[115]. فأقول إن نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة خط ط إلى خط ا ب.



برهان ذلك

أن جميع خطي د و، و ا، إذا قسمناه[116] على نسبة[117] ذات وسط وطرفين، كان القسم الأعظم د و، لأن د و[118] وتر سدس دائرة[119] وخط و ا وتر عُشر دائرة[120]. وقد بيّنا[121]، فيما تقدّم من هذه المقالة، أن خط د ز نصف خطي د و، و ا جميعًا، وأن خط د هـ نصف خط د و، لأن د و نصف قطر الدائرة ود هـ عمود من المركز على ضلع المثلث. فهو[122] نصف نصف القطر.

---

[109]– وذلك ما أردنا أن نُبيّن. M: الجملة مكررة.

[110]– و. M: الرقم ناقص.

[111]– اللذين. M: الذي / J: التي.

[112]– ونخرجه. M: ومخرجه.

[113]– خط. U: الكلمة ناقصة.

[114]– ونصل ا و. U: الجملة ناقصة.

[115]– اللذين ضلع ذي العشرين قاعدة منهما خط ا ب وضلع ذي الاثني عشر قاعدة منهما ضلع ا جـ، وهو خط ط. J: اللذين ضلع ذي الاثني عشر قاعدة منها خط ا جـ وضلع العشرين قاعدة منها خط ا ب، وهو خط ط.

[116]– قسمناه. M، J: قسمنا / U: قسما.

[117]– على نسبة. M: بنسبة.

[118]– ولأن د و وتر. M، U: ولأنه وتر.

[119]– دائرة. M، U: الكلمة ناقصة.

[120]– دائرة. M، U: الكلمة ناقصة.

[121]– بيّنا. M: قلنا.

[122]– فهو. M: وهو.

وقد تبيّن في القول الثالث عشر أن ضلع المكعب، إذا قُسم على نسبة ذات وسط وطرفين، كان قسمه الأعظم ضلع مخمّس ذي الاثنتي عشرة قاعدة الذي تحيط به[123] الكرة التي تحيط بالمكعب. ود ه نصف د و، ود ز نصف د و، وا جميعًا. ود و[124]، وا قد انقسم على نسبة ذات وسط[125] وطرفين، وقسمه الأعظم[126] د و. فخط د ز[127]، إذا قُسم على نسبة ذات وسط وطرفين، كان قسمه الأعظم مساويًا لخط د ه. فنسبة خط ط إلى خط ا جـ كنسبة د ز إلى د ه.

فالسطح[128] الذي يكون من ط في د ه مساو للسطح الذي //U: 196ظ// يكون من ا جـ في د ز. فنسبة[129] السطح[130] الذي يكون من ط في د ه إلى السطح[131] الذي يكون من ا ب في د ه كنسبة المربع الذي يكون من ا جـ في د ز إلى المربع الذي يكون من ا ب في د ه. ونسبة المربع الذي يكون من ا جـ في د ز إلى المربع الذي يكون من ا ب في د ه كنسبة سطح ذي الاثني عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة. فنسبة المربع الذي يكون من ط في د ه إلى المربع الذي يكون من ا ب في د ه كنسبة[132] سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة.

وكل خطين يُضرب كل واحد منهما في خط واحد مشترك لهما، فإن[133] نسبة أحد السطحين اللذين يوكونان منهما إلى السطح الآخر كنسبة الخط إلى الخط. فليكن د ه مشتركًا. فنسبة خط ط إلى خط ا ب كنسبة السطح الذي يكون من خط ط في د ه[134] إلى السطح الذي يكون من ا ب[135] في د ه. فنسبة خط ط إلى خط ا ب كنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين //J: 221و// قاعدة. وخط ط ضلع المكعب وخط ا ب ضلع مثلث[136] ذي العشرين قاعدة، اللذين[137] تحيط //M235و// بهما كرة واحدة.

فنسبة ضلع المكعب إلى ضلع مثلث[138] ذي العشرين قاعدة[139] كنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة اللذين تحيط بهما كرة. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.

ز[140] [المأخوذة 3]

ولأن نُبيّن ذلك على ضرب آخر، نقدّم[141] أن المربّع، الذي يكون من ثلاثة أرباع القطر[142] في خمسة أسداس الخط الذي يُوتّر زاوية[143] مخمّس الدائرة[144]، مساو[145] لمخمّس الدائرة.

---

[123] – الذي تحيط به. M، J: التي تحيط بها.

[124] – و و د. U: فو د.

[125] – وسط. M: الكلمة ساقطة.

[126] – الأعظم. U: الأطول.

[127] – فخط د ز. J: فخط د ز يتوسّط أحد الأنصاف.

[128] – فالسطح. J، U : فالمربع. وهكذا فيما بعد.

[129] – فنسبة. M: ونسبة.

[130] – السطح. M: الط.

[131] – السطح. U: المربع.

[132] – المربع الذي يكون من ا جـ في د ز إلى المربع الذي يكون من ا ب في د ه. ونسبة المربع الذي يكون من ا جـ في د ز إلى المربع الذي يكون من ا ب في د ه كنسبة سطح ذي الاثني عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة. فنسبة المربع الذي يكون من ط في د ه إلى المربع الذي يكون من ا ب في د ه كنسبة. M، J: الفقرة ناقصة / U: الفقرة في الهامش.

[133] – فإن. M: وإن.

[134] – في د ه. U: في خط د ه.

[135] – من د ه. M: من خط د ه.

[136] – مثلث. M: المثلث.

[137] – اللذين. J، U : الذي.

[138] – مثلث. M: المثلث.

[139] – قاعدة. J: زيد بعدها : "اللذين تحيط بهما كرة واحدة".

[140] – ز. M: الرقم ناقص.

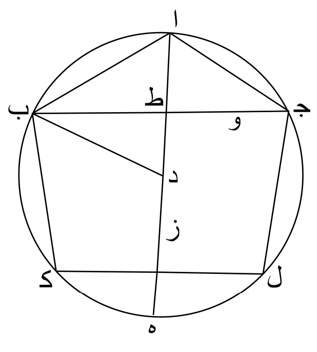
[141] – نقدّم. M: نفرض.

[142] – القطر. J: قطر الدائرة.

[143] – زاوية. M: الكلمة ناقصة.

مثال ذلك

أن نرسم دائرة ا ب جـ، وقطرها[146] ا هـ، ونرسم فيها مخمّس ب ا جـ ل ك ونصل ب جـ ونتعلم، حيث يقاطع القطر خط ب جـ، علامة ط ومركز الدائرة د، ونصل د ب، ونقسم د هـ بنصفين عند نقطة ز ونقسم جـ ط عند نقطة و ونصير ط و مثلي[147] و جـ. فخط و ب[148] خمسة أسداس جـ ب، وا ز ثلاثة أرباع ا هـ[149]. فأقول إن السطح[150] الذي يكون من ا ز في ب و مساو لمخمّس ا ب ك ل جـ.



برهان ذلك

أن ط ب مثل ط جـ[151] وط جـ مثل ثلاثة أمثال جـ و[152]، ود ز نصف ا د. فخط ا ز[153] ثلاثة أمثال د ز، وا ز مثل ونصف ا د، وجـ ط مثل ونصف و ط. فنسبة[154] ا ز إلى ا د[155] كنسبة جـ ط إلى و ط. و جـ ط مثل ط ب. فنسبة //U: 197و// ا ز إلى ا د[156] كنسبة ط ب إلى ط و[157]. فالسطح الذي يكون[158] من ا ز في ط و مساو للسطح الذي يكون من ا د[159] في ب ط[160]. وا د في ب ط ضعف مثلث ا ب د، ومخمّس ا جـ ل ك ب خمسة أمثال مثلث ا ب د. فـ ا ز في و ط[161] وا د في ب ط جميعًا مساو لأربعة أمثال مثلث ا ب د. وط ب في د ز[162] مثل مثلث ا ب د لأن د ز مثل نصف قاعدة ا د. فجميع ا ز[163] في و ط وا د[164] في ب ط ود ز في ب ط[165] مساو لمخمّس ا جـ ل ك

144 – مخمس الدائرة. J: المخمس الذي في هذه الدائرة.

145 – مساو. M: مساوية.

146 – ا ب جـ، وقطرها. M: ا ب جـ د قطرها.

147 – مثلي. M: مثل.

148 – و ب. M: ب.

149 – ا هـ. M: ا م.

150 – السطح. U، J، M: المربّع.

151 – ط جـ. M: الحرفان ناقصان.

152 – وط جـ مثل ثلاثة أمثال جـ و / M: وط جـ مثل ثلاثة أمثال جـ ز / J: وط جـ ثلاثة أمثال و جـ.

153 – ا ز. M: ا ب.

154 – فنسبة. M: ونسبة.

155 – ا د. M: ا جـ.

156 – ا د. M: ا جـ.

157 – ط ب إلى ط و. M: ط ب إلى ط م.

158 – الذي يكون. U: الكائن.

159 – ا د. M: ا جـ.

160 – ب ط. J: ب ط. وهكذا فيما بعد.

161 – و ط. M: ز ط.

162 – د ز. M: جـ ز.

163 – ا ز. M: ا ب.

164 – ا د. M: ا ب.

165 – ود ز في ب ط. M: الجملة ناقصة.

ب[166]. وا ز في و ب مساو لـ ا ز في و ط وا د في ط ب ود ز في ب ط. فَا ز في و ب مساو لمخمّس[167] ا ب ك ل جـ[168]. وذلك ما أردنا أن نُبيّن //M: 235ظ//.

ح[169] [البرهان الثاني للمبرهنة 3]

نريد أن نُبيّن أيضًا أن نسبة //J: 221ظ// سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة، اللذين في كرة واحدة، تحيط بهما، كنسبة[170] ضلع المكعب الذي تحيط به تلك[171] الكرة إلى ضلع ذي العشرين قاعدة.

مثال ذلك

نرسم[172] دائرة ا ب جـ ونرسم فيها مخمّس ذي الاثنتي عشرة قاعدة، وهو مخمّس ا ب ك ل جـ، ومثلث ذي العشرين قاعدة، وهو مثلث ا ط ز[173]، ونصل جـ ب ونخرج قطر ا هـ يقاطع جـ ب عند نقطة و، والمركز[174] د. ونتعلم، حيث قاطعت ز ط[175] القطر[176]، ي. ونفصل من خط جـ ب خمسة أسداسه، وهو خط جـ س. وخط جـ ب يُوتِّر زاوية المخمّس، وهو[177] ضلع المكعب الذي تحيط به الكرة التي تحيط بذي الاثنتي عشرة قاعدة. فأقول إن نسبة خط جـ ب إلى خط ز ط[178] كنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة اللذين تحيط بمُخمّسها ومثلثها[179] دائرة[180] ا ب جـ.

برهان ذلك

أن ا ي في جـ س مساو لمخمّس ا ب ك ل جـ. وا ي في ز ي مساو لمثلث ا ط ز. ولأن خط ا ي مشترك لخط جـ س وخط ز ي، فإن نسبة مخمس ا ب ك ل جـ إلى مثلث ا ط ز كنسبة جـ س إلى ز ي[181]. فنسبة اثني عشر ضعف جـ س إلى عشرين ضعف ز ي كنسبة اثني عشر مخمّس ا ب ك ل جـ إلى عشرين مثلث ا ط ز. فنسبة سطح[182] ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح[183] ذي العشرين قاعدة //U: 197ظ// كنسبة اثني عشر ضعف[184] جـ س إلى عشرين ضعف ز ي. وجـ س خمسة أسداس جـ ب. وز ي نصف ز ط. واثنا عشر ضعف الخمسة[185] مساو لعشرة أضعاف الستة[186]. فعشرة أضعاف جـ ب مساو لاثني عشر ضعف جـ س. وعشرة أضعاف ز ط[187] مساو لعشرين ضعف ز ي.

166– ا جـ ل ك ب. M: ا ط ك ب .

167– وا ز في و ب مساو ... لمخمّس. J: فا ز في و ب مساو لـ لان و ط وا د في ط ب ود ز ب ط. فا ز في و ب مساو لمخمّس / M: وا ز في و ب مساو ا ب في ب ط واجـ في ط ب ود ز في و ب مساو مخمّس.

168– ا ب ل ك جـ. U: ا ب ك ل جـ.

169– ح. M: الرقم ناقص.

170– كنسبة. M: بحسه.

171– تلك. M: ذلك.

172– نرسم. U: أن نرسم.

173– ا ط ز. M: ا ب ط.

174– والمركز. J: ومركز الدائرة.

175– ز ط. M: ب ط / U: قاعدة ز ط.

176– قاطعت ب ط القطر، ي / M: قاطعت ب ط القطر / J: تقاطعت قاعدة ز ط القطر وهو ي.

177– وهو. J، U: فهو.

178– نسبة خط جـ ب إلى خط ز ط. J: نسبة ب جـ إلى ز ط / U: نسبة خط جـ ب إلى ز ط .

179– بمُخمّسها ومثلثها. M: بمُجسّمهما ومثلثهما.

180– دائرة. M: كرة دائرة.

181– فإن نسبة مخمس ا ب ك ل جـ إلى مثلث ا ط ز كنسبة جـ س إلى ز ي. M: الجملة ناقصة.

182– سطح. M: الكلمة ناقصة / U: الكلمة فوق السطر.

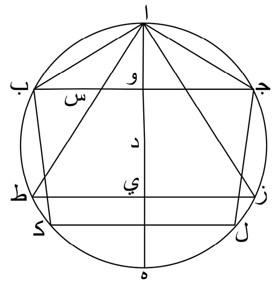
183– سطح. M: الكلمة ناقصة.

184– ضعف. M: الكلمة ناقصة.

185– الخمسة. M: المخمسة.

186– الستة. M، J: نسبته.

فنسبة عشرة أضعاف جـ ب، الذي هو ضلع المكعب، إلى عشرة أضعاف ط ز، الذي هو ضلع مثلث ذي //M: 236و// العشرين قاعدة، كنسبة جـ ب إلى ز ط[188]. فنسبة جـ ب إلى ز ط كنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة اللذين تحيط بهما كرة واحدة. //J: 222و// وذلك ما أردنا أن نُبيّن.



ط[189] [المبرهنة 4]

نريد أن نُبيّن أن كل خط يُقسم على نسبة[190] ذات وسط وطرفين، فإن نسبة الخط القوي على الخط كله وعلى قسمه الأعظم إلى الخط القوي على الخط كله وعلى قسمه الأصغر[191] كنسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة اللذين تحيط بهما كرة واحدة.

مثال ذلك

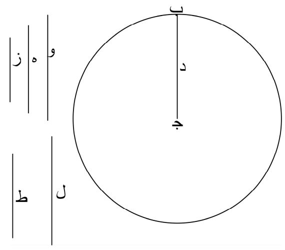
أن خط ب جـ قد قُسِم على نسبة ذات وسط وطرفين، على نقطة د. والقسم الأعظم جـ د ونخُط[192] على نقطة جـ، وببعد جـ ب، دائرة ا ب. ونخط خط هـ ضلع مثلث دائرة ا ب وخط ز ضلع[193] مخمّس دائرة ا ب وخط و ضلع المكعب الذي تحيط به الكرة التي تحيط بذي العشرين قاعدة الذي[194] ضلعه خط هـ. ونرسم خط ط يُقوّي[195] على خطي ب جـ، ب د، وخط ل مساو لخط د جـ. فخط د جـ ضلع معشر دائرة ا ب وخط ب جـ[196] ضلع مسدسها[197] ود جـ القسم الأعظم. فخط ز، الذي هو ضلع مخمّس دائرة ا ب، يُقوّي على خط ب جـ وعلى خط د جـ الأعظم. وقد كنا رسمنا خط ط[198] يقوّي على خط ب جـ[199] وخط ب د الأصغر. فأقول إن نسبة خط ز إلى خط ط كنسبة خط و، الذي هو ضلع المكعب، إلى خط هـ، الذي هو ضلع ذي العشرين قاعدة.

برهان ذلك[200]

أن خط هـ يُقوّي على ثلاثة أمثال خط ب جـ لأن //U: 198و// خط هـ ضلع المثلث وخط ب جـ ضلع المسدّس. وقد تبيّن ذلك في القول الثالث عشر. وقد تبيّن هنالك أن كل خط يُقسم على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن الخط القوي على الخط كله وعلى القسم الأصغر يُقوّي

187– ز ط. M: ب ط.
188– ز ط. M: ب ط .
189– ط. M: الرقم ناقص.
190– على نسبة. U، J: بنسبة.
191– قسمه الأصغر. U: القسم الأصغر.
192– نخُط. M: نحيط.
193– ضلع. M: الكلمة مكررة.
194– الذي ضلعه. M: إلى ضلعه / U: وضلعه.
195– يُقوّي. M: يتري.
196– وخط ب جـ. M: زيدت فوق السطر كلمة "كله".
197– مسدسها. M، J: سدسها.
198– خط ط. J، U:خط ط هو.
199– وعلى خط د جـ الأعظم. وقد كنا رسمنا خط ط يقوّي على خط ب جـ. M: الجملة ناقصة.
200– برهان ذلك. J: برهانه.

على ثلاثة أمثال القسم الأعظم. فخط ط يُقوّي //M: 236ظ// على[201] ثلاثة أمثال خط د جـ. وخط د جـ مثل خط ل. فنسبة خط هـ إلى خط ب جـ كنسبة خط ط إلى خط ل. وإذا بدّلنا، فنسبة خط هـ إلى خط ط كنسبة خط ب جـ إلى خط ل. وخط و، إذا قُسِم على نسبة ذات وسط وطرفين، كان قسمه الأعظم[202] ز. وقد تبيّن ذلك في القول الثالث عشر. فنسبة //J: 222ظ// خط و إلى خط ز كنسبة خط ب جـ إلى خط ل، لأن خط ل قِسمُ ب جـ الأعظم. ونسبة ب جـ إلى ل كنسبة هـ إلى ط. فنسبة هـ إلى ط كنسبة و إلى ز. وإذا بدّلنا، فنسبة و إلى هـ كنسبة ز إلى ط. و ز يُقوّي على ب جـ، جـ د. وط يُقوّي على ب جـ، ب د. وخط و ضلع المكعب وخط هـ ضلع ذي العشرين قاعدة، اللذين تحيط بهما كرة واحدة. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.



ي[203] [المبرهنة 5]

نريد أن نُبيّن أن نسبة[204] مجسم ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى مجسم ذي العشرين قاعدة كنسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة اللذين تحيط بهما كرة واحدة.

برهان ذلك[205]

أن الدوائر التي تحيط بمخمس ذي الاثنتي عشرة قاعدة وبمثلث ذي العشرين قاعدة، اللذين في كرة واحدة، متساوية وأبعادها[206] من مركز الكرة متساوية. فالأعمدة التي تخرج من مركز الكرة إلى سطوح الدوائر وتقع[207] على مركز الدوائر المحيطة بمخمس //M:237و// ذي الاثنتي عشرة قاعدة وبمثلث ذي العشرين قاعدة، هي متساوية . فلذلك[208] المخروطات التي قواعدها مُخمّسات ذي الاثنتي عشرة قاعدة والمخروطات التي قواعدها[209] مثلثات ذي العشرين قاعدة[210] هي متساوية السمك. والمخروطات //U: 198ظ// المتساوية السمك، نسبة بعضها إلى بعض كنسبة قواعد بعضها إلى بعض. فنسبة المخروط الذي[211] قاعدته مخمس ذي الاثنتي عشرة قاعدة[212] إلى المخروط الذي قاعدته مثلث[213] ذي العشرين قاعدة كنسبة مخمس ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى مثلث ذي العشرين قاعدة.

فلذلك[214] نسبة اثني عشر مثلا لمخمس ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى عشرين مثلا لمثلث ذي العشرين قاعدة كنسبة ثني عشر مخروطًا، //J: 223و// قواعدها مُخمّسات ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى عشرين مخروطًا قواعدها مثلثات ذي العشرين قاعدة التي في كرة واحدة. واثنا[215] عشر

[201]– على. M: الكلمة ناقصة.

[202]– الأعظم. J: الأطول.

[203]– ي. M، U: الرقم ناقص.

[204]– نسبة. U: الكلمة ناقصة.

[205]– برهان ذلك. J: برهانه.

[206]– وأبعادها. U: فأبعادها.

[207]– وتقع. M: تقع.

[208]– وبمثلث ذي العشرين قاعدة هي متساوية، فلذلك. M: الجملة ناقصة.

[209]– مُخمّسات ذي الاثني عشر قاعدة والمخروطات التي قواعدها. M: الجملة ناقصة.

[210]– قاعدة. M: زيدت بعدها "وتخرج للمركز".

[211]– الذي. M: الى.

[212]– إلى المخروط الذي قاعدته مخمس ذي الاثني عشر قاعدة. M: الجملة زائدة.

[213]– مثلث. M: مثلثة.

[214]– فلذلك. M: فذلك.

مخمسا[216] ذي[217] الاثنتي[218] عشرة قاعدة هي مساوية لسطحه. واثنا عشر مخروطًا //J: 233و// قواعدها تلك المخمسات هي مجسمة ذي الاثنتي عشرة قاعدة. وعشرون مثلثا ذي العشرين قاعدة هي مساوية لسطحه. وعشرون مخروطًا قواعدها تلك المثلثات هي مجسمة ذي العشرين قاعدة. فنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة، اللذين في كرة واحدة، كنسبة مجسم ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى مجسم ذي العشرين قاعدة.

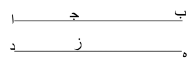
وقد كنا بيّنّا أن نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة اللذين تحيط بهما كرة واحدة كنسبة ضلع المكعب الذي تحيط به تلك الكرة إلى ضلع ذي العشرين قاعدة. فنسبة مجسم ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى مجسم ذي العشرين قاعدة، اللذين[219] في كرة واحدة، كنسبة ضلع المكعب الذي في تلك الكرة إلى ضلع مثلث ذي العشرين قاعدة. وذلك ما أردنا أن نبيّن[220]. //M:237ظ//

يا[221] [المأخوذة المُلحقة]

نريد أن نُبيّن أن جميع الأعراض التي عرضت للخط المقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين على علامة جـ، ويكون القسم الأعظم ا جـ[222]، تعرض لأي خط وقع على تلك النسبة، أعني على نسبة ذات وسط وطرفين[223].

[مثال ذلك]

أن نقسم خط ا ب على نسبة ذات وسط وطرفين على علامة جـ. ويكون قسمه الأعظم ا جـ. ونقسم أي خط وقع على تلك النسبة، أعني على نسبة ذات وسط وطرفين. وليكن ذلك الخط خط د هـ. ولتكن نقطة ز[224] تقسمه على نسبة[225] ذات وسط وطرفين ويكون الأعظم منه[226] د ز. فأقول إن جميع الأعراض التي تعرض لخط ا ب //U: 199و// تعرض لخط د هـ.



برهان ذلك

أنّا إذا قسمناهما[227] على نسبة واحدة، أعني على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن نسبة ا ب إلى ا جـ كنسبة ا جـ إلى جـ ب. وبهذه القسمة قُسم د هـ[228]. فنسبة د هـ إلى د ز كنسبة د ز إلى ز هـ. فإذًا، نسبة ا ب إلى ا جـ كنسبة د هـ إلى د ز. فإذًا الذي يكون من ضرب ا ب في ب جـ مثل الذي يكون من ضرب ا جـ في ذاته[229]. وكذلك، الذي[230] يكون من ضرب د هـ في هـ ز مثل الذي يكون من ضرب[231] د ز في ذاته. فلذلك،

215– وإثنى. M: فإثنى.
216– مخمسا. U: مخمس.
217– ذي. M: ذو.
218– الاثني. M: اثني.
219– اللذين. M: اللتين.
220– وذلك ما أردنا أن نبيّن. M: الجملة ناقصة.
221– يا. M: الرقم ناقص / U: ي.
222– على علامة جـ ويكون القسم الأعظم ا جـ. J، U: الجملة ناقصة.
223– تعرض لكل خط قُسم على نسبة ذات وسط وطرفين. M: ويقسم أي خط وقع على تلك النسبة، أعني على نسبة ذات وسط وطرفين.
224– ولتكن نقطة ز تقسمه. J: وليكن د هـ يقسمه / U: وليكن ز يقسمه.
225– على نسبة. M: الكلمتان ناقصتان.
226– الأعظم منه. U: قسمه الأعظم.
227– أنا إذا قسمناهما. J: أن ا ب، د هـ قسما / U: إن قسمتهما.
228– خط د هـ. J، U: د هـ.
229– مثل الذي يكون من ضرب ا جـ في ذاته. U: مساو لمربّع ا جـ.
230– وكذلك الذي. U: والذي.
231– يكون من ضرب. M: الجملة ناقصة.

نسبة الذي يكون من ضرب ا ب في ب ﺟ إلى الذي يكون من ضرب ا ﺟ في ذاته كنسبة //J: 223ظ// الذي[232] يكون من ضرب[233] د ﻫ في ﻫ ز إلى الذي يكون من ضرب[234] د ز في ذاته.

وكذلك، تكون نسبة أربعة أضعاف الذي يكون من ضرب ا ب في ب ﺟ إلى الذي يكون من ضرب ا ﺟ في ذاته كنسبة أربعة أضعاف الذي يكون من ضرب د ﻫ في ﻫ ز إلى الذي يكون من ضرب د ز في ذاته. وكذلك تكون، إذا ركّبنا، نسبة الذي يكون من ضرب أربعة أضعاف ا ب في ب ﺟ وضرب ا ﺟ[235] في ذاته إلى الذي يكون من ضرب ا ﺟ في ذاته كنسبة الذي يكون من ضرب أربعة أضعاف د ﻫ في ﻫ ز وضرب[236] د ز[237] في ذاته إلى الذي يكون[238] من ضرب[239] د ز[240] في ذاته.

ولذلك تكون نسبة الذي يكون من ضرب د ﻫ، ﻫ ز أجمع في ذاته[241] إلى د ز في ذاته[242] كنسبة الذي يكون من[243] ضرب ا ب، ب ﺟ[244] أجمع في ذاته إلى ضرب ا ﺟ في ذاته. ولذلك تكون نسبة ا ب، ب ﺟ أجمع إلى[245] ا ﺟ كنسبة د ﻫ، ﻫ ز أجمع إلى[246] د ز. وإذا ركّبنا، تكون نسبة ا ب، ب ﺟ أجمع مع ا ﺟ إلى ا ﺟ[247] كنسبة د ﻫ، ﻫ ز جميعًا مع د ز إلى د ز. ولذلك[248] تكون نسبة ا ب إلى ا ﺟ كنسبة د ﻫ إلى ز د. ولذلك نسبة ا ب إلى ا ﺟ كنسبة د ﻫ إلى د ز. وإن بدّلنا، فنسبة ا ب إلى د ﻫ كنسبة ا ﺟ إلى د ز[249] وكنسبة ب ﺟ إلى ﻫ ز.

فقد تبيّن أن الأعراض التي تعرض، لكل خط قُسم على نسبة ذات وسط وطرفين، واحدة. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.

يب[250] [مراجعة]

فقد تبيّن أن كل خط يُقسم على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن نسبة الخط //M:238و// القوي على الخط، وعلى قسمه الأعظم، إلى الخط القوي على الخط وعلى قسمه الأصغر، كنسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة المرسومين[251] في كرة واحدة.

وقد تبيّن أيضًا أن نسبة[252] سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة، اللذين //U: 199ظ// في كرة واحدة، كنسبة[253] ضلع المكعب، الذي تحيط به تلك الكرة، إلى ضلع ذي العشرين قاعدة.

وقد تبيّن أيضًا أن نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة، اللذين تحيط بهما كرة واحدة، كنسبة مجسم ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى مجسم ذي العشرين قاعدة.

---

[232]– الذي. M: التي.
[233]– ضرب. M، U: الكلمة ناقصة. وهكذا فيما بعد.
[234]– د ﻫ في ﻫ ز إلى الذي يكون من ضرب. M: الجملة ناقصة.
[235]– ا ﺟ. M: ب ﺟ.
[236]– ضرب. M، J، U: الكلمة ناقصة.
[237]– د ز. M، U: ﻫ ز.
[238]– يكون. U: الكلمة ناقصة.
[239]– يكون من ضرب. M: الجملة ناقصة.
[240]– د ز. M، U: ﻫ ز.
[241]– في ذاته. M: في ذاته أجمع.
[242]– في ذاته. M: الكلمتان ناقصتان.
[243]– الذي يكون من. M: الجملة ناقصة.
[244]– ا ب، ب ﺟ. M: ا ب ﺟ. هكذا فيما بعد.
[245]– د ز في ذاته كنسبة الذي يكون ... ولذلك تكون نسبة ا ب، ب ﺟ أجمع إلى. M: الجملة ناقصة.
[246]– في ذاته إلى ضرب ا ﺟ في ذاته. ولذلك تكون نسبة ا ب ﺟ أجمع إلى ا ﺟ كنسبة (...) أجمع إلى. M: الجملة ناقصة.
[247]– إلى ا ﺟ. M: الجملة ناقصة.
[248]– ولذلك. M: وكذلك.
[249]– وإن بدّلنا، فنسبة ا ب إلى د ﻫ كنسبة ا ﺟ إلى د ز. M: الجملة ناقصة.
[250]– يب. M، U: الرقم ناقص.
[251]– المرسومين. M: المرسوم.
[252]– نسبة. M: الكلمة في الهامش.
[253]– كنسبة. M: بحسبة.

وقد تبيّن أيضًا //J: 224و// أن نسبة مجسم ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى مجسم ذي العشرين قاعدة، اللذين تحيط بهما كرة واحدة، كنسبة ضلع المكعب الذي تحيط به تلك الكرة إلى ضلع ذي العشرين قاعدة.

فقد وجب من ذلك أيضًا أن كل خط[254] يُقسم على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن نسبة الخط القوي على الخط وعلى قسمه الأعظم إلى الخط القوي على الخط وعلى قسمه الأصغر كنسبة مجسم ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى مجسم ذي العشرين قاعدة اللذين تحيط بهما كرة واحدة. وذلك ما أردنا أن نُبيّن[255].

تمت المقالة الرابعة عشرة لابسقلاوس[256] المضافة إلى أوقليدس. ولله الحمد والمنّ[257].

---

[254]– خط. M: الكلمة ناقصة.

[255]– وذلك ما أردنا أن نُبيّن. U: الجملة ناقصة.

[256]– لابسقلاوس. U: لسقلاوس.

[257]– تمت المقالة الرابعة عشر لابسقلاوس المضافة إلى أوقليدس. ولله الحمد والمنّ. M: كمِل اسقلايس الرابع عشر من الكتاب المنسوب إلى أوقليدس. والحمد لله كثيرًا / J: تمّ القول الرابع عشر وهو اثنى عشر شكلا.

3. Texte arabe du Livre XIV dans le manuscrit Rabat 1101

[المقالة الرابعة عشرة لابسقلاوس]

بسم الله الرحمن الرحيم، وصلى الله على سيدنا محمد نبيه الكريم وعلى آله[258] وسلم تسليمًا.

كتاب ابسقلاوس في المقالة الرابعة عشرة من كتاب الأصول.

إن باسليدس[259] الذي كان من أهل صور ، يا بروطرخس، لما صار إلى الإسكندرية لقي أبانا الذي كان بينهما من قرابة الاشتراك في النظر في العلوم التعليمية . فقام عنده أكثر زمان غيبته . فقرءا وامتحنا في بعض أوقاتهما ما كتبه أبلونيوس في قياس الشكل الذي له اثنتا عشرة قاعدة والذي له عشرون قاعدة المعمولين في كرة واحدة كل واحد منهما على صاحبه وأي نسبة لكل واحد منهما إلى الآخر.

وظنّا أن الكتاب الذي وضعه أبلونيوس في هذا الباب ليس بصواب . فنقشا[260] الأقاويل التي في هذا الكتاب وصححاها وكتبا ما عملا كما سمعت من والدي .

وأما أنا ، فإنه وقع إلي، بعد ذلك، كتاب آخر لأبلونيوس عمل فيه الأشكال التي ذكرها ببراهين صحيحة. وانتفعت بها منفعة عظيمة في المعرفة بهذه الأشياء التي ذكرناها .

فأما الكتاب الذي كان وضعه في ذلك أبلونيوس ، فقد يمكننا جميعا أن نشترك في النظر فيه[261] وذلك أنه كتاب قد صار في أيدي[262] الناس ووقع إلى كثير منهم .

وأما ما وضعناه نحن من بعد وفسرنا فيه بعناية جميع ما ينبغي أن نفسر، فقد رأينا أن نكتب به إليك إذ كنت قويا على تمييز ما يقال من ذلك وتحصيله لتقدمك في جميع العلوم التعليمية وخاصة[263] في علم الهندسة، وكنت أنت كثير الألفة لأبينا حسن الرأي فينا ، يسرّك أن تسمع ما نقوله .

فقد آن لنا أن نترك ما نحن فيه من هذا الصدر ونأخذ في الشيء الذي نريد أن نتكلم فيه.

ا[264] [المبرهنة 1]:

فنقول، مبتدئين[265] إن[266] العمود الذي يخرج من مركز دائرة إلى ضلع المخمس، الذي يُخَط في تلك الدائرة، هو مساو لنصف الخط الذي يخرج من مركز تلك الدائرة إلى الخط المحيط بها مع نصف ضلع المعشر الذي يُخط في تلك الدائرة، إذا جُمعا[267].

[مثال ذلك]:

فلتكن دائرة عليها الف با جيم. وليكن[268]، في دائرة الف با جيم، ضلع مخمس متساوي الأضلاع، وهو با جيم. وليكن مركز الدائرة دال، ولنخرج منه، إلى با جيم، عمود دال ها ونخرج خط ها زاي على استقامة خط دال ها.

فأقول إن خط دال ها مساو لنصف ضلع المسدس وضلع المعشر، اللذين يخطان في هذه الدائرة، إذا جُمِعا.

---

[258]– آله. H: الكلمة ناقصة.

[259]– باسليدس. H: تاسليدس.

[260]– فنقشا. H: ففتشا .

[261]– فيه. H: الكلمة ناقصة.

[262]– أيدي. H: الكلمة ناقصة.

[263]– وخاصة. H: وبخاصة .

[264]– ا. H: الرقم الأبجدي ناقص.

[265]– مبتدئين. H: مبتديا.

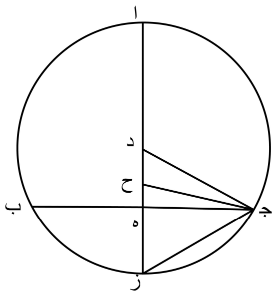
[266]– إن. H: الكلمة ناقصة.

[267]– جمعا. H: جمع.

[268]– وليكن. H: ولتكن.

برهانه:

أنا نخرج خطي دال جيم وجيم زاي. وليكن خط ها حا[269] مساويًا لخط ها زاي. ونصل فيما بين نقطتي حا، جيم بخط جيم حا. فلما كان جميع الف جيم زاي نصف الدائرة[270] ونصف قوس با زاي جيم قوس زاي جيم، صارت قوس الف جيم زاي خمسة أمثال قوس جيم زاي. فقوس الف جيم أربعة أمثال قوس زاي جيم. ونسبة قوس الف جيم إلى قوس زاي جيم كنسبة زاوية الف دال جيم إلى زاوية زاي دال جيم. فزاوية الف دال جيم أربعة أمثال زاوية زاي دال جيم. وزاوية الف دال جيم مثلا زاوية ها زاي جيم. فزاوية ها زاي جيم أيضا مثلا زاوية حا دال جيم، وزاوية ها زاي جيم مساوية لزاوية ها[271] حا جيم. فزاوية ها حا جيم مثلا زاوية حا دال جيم. فخط دال حا مثل خط جيم حا. ولكن خط حا جيم مثل خط زاي جيم. فخط دال حا مساو لخط زاي جيم وخط حا ها أيضا مثل خط ها زاي. فخط ها دال مساو لخطي ها زاي وزاي جيم، إذا جُمعا. ونجعل خط دال ها مشتركا. فخطا[272] دال زاي وزاي جيم، إذا جُمعا، كانا مثلي خط دال ها.



فأما خط دال زاي، فهو مساو لضلع المسدّس وأما خط زاي جيم، فهو ضلع المعشّر. فخط دال ها مساو لنصف ضلع المسدس وضلع المعشر[273] اللذين يخطان في هذه الدائرة، إذا جُمعا.

وقد تبين، من شكل في المقالة الثالثة عشرة، أن العمود الذي يخرج من مركز الدائرة إلى ضلع المثلث المتساوي الأضلاع الذي يعمل في الدائرة هو نصف الخط الذي يخرج من مركز الدائرة إلى الخط المحيط بها. وذلك ما أردنا أن نبين.

[انتقال من المبرهنة 1 إلى المبرهنة 2]:

المخمس[274] الذي هو أحد سطوح الشكل الذي له اثنتا عشرة قاعدة والمثلث الذي هو أحد سطوح الشكل الذي له عشرون قاعدة تحيط بهما //H: 120ظ// دائرة واحدة إذا كان الشكلان مجموعين معمولين في كرة واحدة.

وقد ذكر ذلك أرسطاوس في كتابه الموسوم بكتاب قياس خمسة الأشكال بعضها إلى بعض. وذكر أبلونيوس، في الرواية الثانية التي رويت عنه في قياس الشكل الذي له اثنتا عشرة قاعدة إلى الشكل الذي له عشرون قاعدة : فأقول إن نسبة سطح الشكل الذي له اثنتا عشرة قاعدة إلى سطح الشكل الذي له عشرون قاعدة كنسبة ذي الاثنتي عشرة قاعدة نفسه إلى ذي العشرين[275] قاعدة. وذلك أن العمود الذي يخرج من مركز الكرة إلى مخمس ذي الاثنتي عشرة قاعدة هو مثل العمود الذي يخرج منه إلى مثلث ذي العشرين قاعدة[276].

وأما نحن، فنقول في ذلك إنه يحيط بمخمس ذي الإثني عشرة قاعدة وبمثلث ذي العشرين قاعدة اللذين يُعملان في كرة واحدة. وأقدّم لذلك أولا ما أنا قائله.

[269]– حا. H: با.

[270]– نصف الدائرة. H: الجملة ناقصة.

[271]– ها. H: الكلمة ناقصة.

[272]– خطا. H: خط.

[273]– المعشر. H: المسدس.

[274]– المخمس. H: كتب في الهامش الرقم الأبجدي "ا".

[275]– العشرين. H: العشرمن.

[276]– قاعدة. H: الكلمة ناقصة.

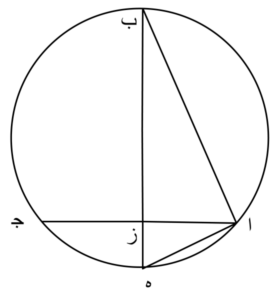
[المأخوذة 2/1]:

إذا عُمل في دائرة مخمس متساوي الأضلاع، فإن مربّع ضلع المخمس والمربع الكائن من الخط المستقيم[277] الذي يُوَتِّر الزاوية التي يحيط بها ضلعان من أضلاع المخمس، إذا جُمعا، خمسة أمثال مربع نصف قطر الدائرة.

[مثال ذلك]:

فلتكن دائرة عليها الف با جيم، وليُعمل فيها ضلع مخمس، وهو الف جيم. وليكن مركز الدائرة دال. ونخرج منه إلى خط الف جيم عمود دال زاي، ونخرجه إلى نقطتي با وها ونصل خط الف با.

فأقول إن المربعين الكائنين من خطي با الف والف جيم، إذا جُمعا، خمسة أمثال المربع الكائن من دال ها.



[برهانه]

فنخرج خط الف ها، فيكون خط الف ها ضلع المعشر. ولأن خط با ها مثلا خط ها دال، يصير مربع با ها أربعة أمثال مربع دال ها. والمربع الكائن من خط با ها مساو لمربعي الف با والف ها. فالمربّعان الكائنان من خطي با الف والف ها أربعة أمثال مربع ها دال. ولذلك تكون المربعات الكائنة من خطوط با الف والف ها وها دال خمسة أمثال مربع دال ها. والمربع الكائن من الف جيم مساو لمربعي دال ها وها الف. فمربعا با الف والف جيم، جميعا، خمسة أمثال مربع دال ها[278]. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

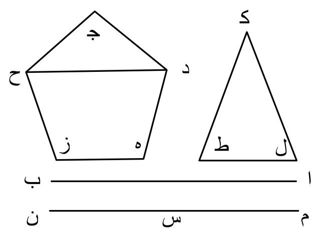
ب [المبرهنة 2]:

فإذ قد تبيّن ذلك، فلنبيّن أن مخمس الشكل الذي تحيط به اثنتا عشرة قاعدة ومثلث الشكل الذي تحيط به عشرون قاعدة اللذين يُرسمان في كرة واحدة تحيط بهما دائرة واحدة.

[مثال ذلك]:

فنضع قطر كرة ما، وهو الف با، ونرسم في هذه الكرة شكلا ذا اثنتي عشرة قاعدة وشكل ذي العشرين قاعدة. وليكن مخمّس الشكل الذي تحيط به اثنتا عشرة قاعدة جيم دال ها زاي حا، ومثلث الشكل الذي تحيط به عشرون قاعدة كاف لام طا.

فأقول إن الخطين اللذين يخرجان من مركزي الدائرتين اللتين تحيطان بهما إلى[279] الخطين المحيطين بهما متساويان.



277- المستقيم. H: المقسوم.

278- دال ها. H: دال طا.

279- إلى. H: على.

برهانه:

أن نخط دائرة واحدة لمخمّس جيم دال ها زاي حا ومثلث كاف لام طا. فلنخرج خط حا دال ونخط خطًا مستقيمًا ما يكون المربع الكائن من الف با خمسة أمثال المربع الكائن منه، وهو ميم نون. وقطر الكرة أيضا خمسة أمثال نصف قطر دائرة ذي العشرين قاعدة، في القوة. فخط ميم نون نصف قطر دائرة ذي العشرين قاعدة.

ولنقسم خط ميم نون، على نسبة ذات وسط وطرفين، على نقطة سين. وليكن قسمه الأعظم ميم سين. ولأن مربع الف با خمسة أمثال مربع ميم نون، كذا فرضناه، ومربع الف با ثلاثة أمثال مربع دال حا، تكون ثلاثة أمثال مربع دال حا مساوية لخمسة أمثال مربع ميم نون. ونسبة ثلاثة أمثال مربع دال حا إلى ثلاثة أمثال مربع جيم حا كنسبة خمسة أمثال مربع ميم نون إلى خمسة أمثال مربع ميم سين. وخمسة أمثال مربع ميم نون مع خمسة أمثال مربع ميم سين هي مثل خمسة أمثال مربع كاف لام. فخمسة أمثال مربع كاف لام هي ثلاثة أمثال مربع جيم حا مع ثلاثة أمثال مربع دال حا[280]. ولكن خمسة أمثال مربع كاف لام مساوية لخمسة عشر مثلا للمربع الكائن من نصف قطر الدائرة التي تحيط بمثلث كاف لام طا. وثلاثة أمثال مربع دال حا مع //H: 121و// ثلاثة أمثال مربع جيم حا مساوية لخمسة عشر مثلا للمربع الكائن من نصف قطر الدائرة التي يحيط بها مخمّس جيم دال ها زاي حا. وذلك أنه قد تبيّن، فيما تقدّم، أن مربع دال حا مع مربع جيم حا خمسة أمثال مربع نصف قطر الدائرة التي تحيط بمخمّس جيم دال ها زاي حا. فخمسة عشر مثلا للمربع الكائن من نصف قطر احدي الدائرتين مساوية لخمسة عشر مثلا للمربع الكائن من نصف قطر الدائرة الأخرى. فمربع نصف[281] واحد من القطرين مساو لمربع القطر[282] الآخر. فالقطر إذن مساو للقطر[283].

فمخمّس الشكل الذي تحيط به اثنتا عشرة قاعدة ومثلث الشكل الذي تحيط به عشرون قاعدة، اللذين يُخطّان في كرة واحدة، تحيط بهما دائرة واحدة. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.

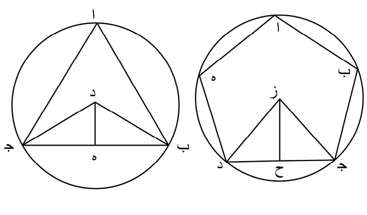
ج [المأخوذة a3/2]:

إذا كان مخمّس متساوي الأضلاع والزوايا وأحاطت به دائرة وأخرج من مركزها عمود على أحد أضلاع المخمّس، فإن ثلاثين مرة مثل السطح الذي تحيط به أحد أضلاع المخمّس والعمود مساوية لسطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة.

[مثال ذلك]:

فليكن المخمّس المتساوي الأضلاع والزوايا مخمس الف با جيم دال ها. ولنخط على هذا المخمس دائرة مركزها نقطة زاي. ولنخرج من نقطة زاي إلى ضلع جيم دال عمود زاي حا.

فأقول إن ثلاثين مرة مثل السطح الذي يحيط به خطا جيم دال وزاي حا مساوية لاثنتي عشرة مرة مثل[284] مخمس الف با جيم دال ها.



[برهانه]:

فلنخرج خطي جيم زاي وزاي دال. فلأن السطح الذي يحيط به خطا جيم دال وحا زاي مثلا مثلث جيم دال زاي، يكون خمسة أمثال السطح الذي يحيط به خطا جيم دال وزاي حا مثل عشرة أمثال مثلث جيم دال زاي. وعشرة أمثال مثلث جيم دال زاي هي مثلا المخمس. وإذا

280– مع ثلاثة أمثال مربع دال حا. H: الجملة ناقصة.

281– نصف. H: كل.

282– لمربع القطر. H: لمربع نصف القطر.

283– للقطر. H: للقطرين.

284– مثل. H: مثال.

ضُعِّف[285] ذلك ستّ مرات، كانت ثلاثون مرة مثل السطح الذي يحيط به خطا جيم دال وزاي حا مساوية لاثني عشر مخمسًا. والاثنا عشر مخمسًا هي سطح الشكل الذي تحيط به اثنتا عشرة قاعدة. فثلاثون مرة مثل السطح الذي يحيط به خطا جيم دال وزاي حا مساوية لسطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة.

[المأخوذة b3/2]:

وبمثل ذلك نُبيّن أنه إذا كان مثلث متساوي الأضلاع، كمثلث الف با جيم، وأحاطت به دائرة وكان مركز الدائرة نقطة دال وأخرج، منه إلى با جيم، عمود دال ها، كان ثلاثون[286] مرة مثل السطح الذي يحيط به با جيم ودال ها مساويًا[287] لذي العشرين قاعدة.

[برهانه]:

وذلك أن السطح الذي يحيط به خطا دال ها وبا جيم مثلا مثلث دال با جيم. فمثلثان، مثل دال با جيم، مساويان للسطح الذي يحيط به خطا دال ها وبا جيم. ونضاعف ذلك ثلاثة مرات. فتكون ستة مثل مثلث دال با جيم مساوية لثلاثة أمثال السطح الذي يحيط به خطا دال ها وبا جيم. وستة مثل مثلث دال با جيم مساوية لمثلي مثلث[288] الف با جيم. ونضاعف ذلك عشر مرات. فثلاثون[289] مرة مثل السطح الذي يحيط به خطّا[290] دال ها وبا جيم مساوية لعشرين مثلثًا مثل الف با جيم. وذلك مساو لسطح ذي العشرين قاعدة.

[المأخوذة c3/2]:

فتكون، لذلك، نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة السطح الذي يحيط به خطّا جيم دال وزاي حا، من الصورة التي فيها المخمس، إلى السطح الذي يحيط به خطّا با جيم ودال ها، من الصورة التي فيها المثلث.

وتبيّن من هذا أن نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة السطح الذي يحيط به ضلع المخمس والعمود الواقع عليه من مركز الدائرة إلى السطح الذي يحيط به ضلع ذي العشرين قاعدة والعمود الواقع عليه من مركز الدائرة المحيطة بمثلثه[291] إذا كان ذو الاثنتي عشرة قاعدة وذو العشرين قاعدة مرسومين في كرة واحدة. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.

د [المبرهنة 3]:

فإذا كان ذلك كذلك، فإنا نُبيّن أن نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة.

[مثاله]:

فلتكن دائرة تحيط بمخمس //H: 121ظ// ذي الاثنتي عشرة قاعدة ومثلث ذي العشرين قاعدة اللذين يُرسمان في كرة واحدة، وهي دائرة الف با جيم. ولنرسم في دائرة الف با جيم ضلع المثلث المتساوي الأضلاع، وهو جيم دال، وضلع المخمس، وهو الف جيم. وليكن مركز الدائرة نقطة ها. ونخرج من نقطة ها إلى خطي جيم دال وجيم الف عمودي ها زاي وها حا. ونخرج خط حا با المستقيم على استقامة خط ها حا[292] إلى نقطة با من محيط دائرة الف با جيم[293]. وليكن ضلع المكعب طا.

فأقول إن نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة طا إلى جيم دال.

---

[285]– ضُعف. H: أضعف.

[286]– ثلاثون. H: ثلاثين.

[287]– مساويًا. H: مساو.

[288]– لمثلي مثلث. H: لمثلثين مثل مثلث.

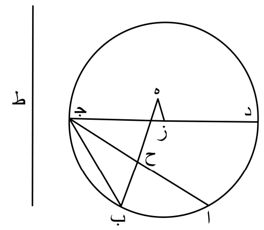
[289]– ثلاثون. H: ثلثون. وهكذا فيما بعد.

[290]– خطّا. H: حا.

[291]– المحيطة بمثلثه. H: محيط بمثله.

[292]– ها حا. H: با جيم.

[293]– إلى نقطة با من محيط دائرة الف با جيم. H: الجملة ناقصة.



[برهانه]:

فلأن خطي ها با وبا جيم، إذا جُمعا وقُسم جميعهما على نسبة ذات وسط وطرفين، كان القسم الأعظم با ها. ونصف خطي با ها وبا جيم هو ها حا، ونصف با ها هو ها زاي. إذا[294] قسمنا خط ها حا على نسبة ذات وسط وطرفين، كان القسم الأعظم مثل ها زاي. فنسبة طا إلى الف جيم كنسبة ها حا إلى ها زاي. فالسطح الذي يحيط به خطا ط وها زاي مساو للسطح الذي يحيط به خطا الف جيم وها حا.

ولإن نسبة طا إلى جيم دال كنسبة السطح الذي يحيط به خطا طا وها زاي إلى السطح الذي يحيط به خطا جيم دال وها زاي، والسطح الذي يحيط به خطا طا وها زاي، قد بيّنّا أنه مساو للسطح الذي يحيط به خطا الف جيم وحا ها، تكون نسبة ط إلى جيم دال كنسبة السطح الذي يحيط به خطّا[295] الف جيم وها حا إلى السطح الذي يحيط به خطا جيم دال وها زاي. وذلك كنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة. فنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة طا إلى جيم دال. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.

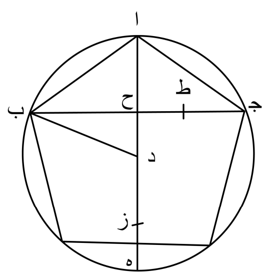
هـ [المأخوذة 3]:

وقد يتبيّن[296]، ببرهان آخر، أن نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة. ونُقدِّم، قبل ذلك، هذه المقدمة :

[مثال ذلك]:

نخط دائرة الف با ها جيم[297] ونرسم فيها ضلعي[298] مخمس متساوي الأضلاع، وهما الف با والف جيم. ونُخرج خط با جيم ونجعل مركز الدائرة نقطة دال ونصل فيما بين نقطتي دال والف بخط الف دال ونُخرج خط دال ها على استقامة خط الف دال، ونجعل خط دال زاي مثل نصف خط الف دال وخط حا جيم ثلاثة أمثال خط جيم طا.

فأقول إن السطح الذي يحيط به خطا الف زاي وبا طا مساو للمخمس الذي في دائرة الف با ها جيم.



[294]- إذا. H: يكون إذا.

[295]- خطّا. H: خط.

[296]- يتبيّن. H: تبين.

[297]- الف با ها جيم. H: الف با جيم.

[298]- ضلعي. H: ضلع.

برهانه:

أنا نصل فيما بين نقطتي با، دال بخط با دال. فلأن الف دال مثلا دال زاي، يكون خط الف زاي مرة ونصفًا مثل خط الف دال. وأيضًا فإن خط جيم حا، لما كان ثلاثة أمثال خط جيم ط، صار خط حا طا مثلي خط جيم طا. ولذلك يكون خط جيم حا مرة ونصف مثل خط طا حا. فنسبة زاي الف إلى الف دال كنسبة جيم حا إلى حا طا. فالسطح الذي يحيط به خطا زاي الف وحا طا مساو للسطح الذي يحيط به خطا الف دال وجيم حا. وخط جيم حا مساو لخط با حا. فالسطح الذي يحيط به خطا الف دال وبا حا مساو للسطح الذي يحيط به زاي الف وحا طا. والسطح الذي يحيط به خطا الف دال وحا با مساو لمثلي مثلث الف با دال[299]. فالسطح الذي يحيط به خطا زاي الف وحا طا مثلا مثلث الف با دال. فخمسة أمثال السطح الذي يحيط به خطا الف زاي وحا طا مساوية لعشرة أمثال مثلث الف با دال. وعشرة أمثال مثلث الف با دال هي مثلا المخمس. فخمسة أمثال السطح الذي يحيط به خطا الف زاي وحا طا هي مثلا المخمس.

ولأن خط حا طا مثلا خط طا جيم، يكون السطح الذي يحيط به خطا الف زاي وحا طا مثلي السطح الذي يحيط به خط الف زاي وطا جيم[300]. ونضاعف ذلك خمس مرات. فتكون عشرة أمثال السطح الذي يحيط به خطا الف زاي وطا جيم مثل خمسة أمثال السطح الذي يحيط به خطا الف زاي وحا طا. وذلك مساو لمثلي المخمس. فيكون، لذلك، خمسة أمثال السطح الذي يحيط به خطا الف زاي وطا جيم مثل المخمس. وخمسة أمثال السطح الذي يحيط به خطا الف زاي وطا جيم مساوية للسطح الذي يحيط به خطا الف زاي وبا طا. وذلك لأن[301] خط با طا خمسة أمثال خط طا جيم. وخط الف زاي ارتفاع مشترك[302]. فالسطح الذي يحيط به خطا الف زاي وبا طا //H: 122و// مساو للمخمس. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.

و [البرهان الثاني للمبرهنة 3]:

فإذ قد تبيّن ذلك، فإنّا نخط دائرة تحيط بمخمس ذي الاثنتي عشرة قاعدة وبمثلث ذي العشرين قاعدة اللذين يرسمان في كرة واحدة، وهي دائرة الف با جيم. ونخط في هذه الدائرة ضلعين من أضلاع المخمس، وهما با الف والف جيم، ونخرج خط با جيم. وليكن مركز الدائرة نقطة ها ونصل فيما بين نقطة الف وها بخط الف ها ونخرجه إلى زاي. وليكن خط الف ها مثلي خط ها حا[303]. وليكن خط كاف جيم[304] ثلاثة أمثال خط جيم طا. وليمرّ بنقطة حا خط[305] يقطع الف زاي على زوايا قائمة، وهو دال ميم. فمثلث الف دال ميم متساوي الأضلاع.

ولأن السطح الذي يحيط به خط الف حا وطا با مساو للمخمس الذي تحيط به هذه الدائرة والسطح الذي يحيط به خطا الف حا وحا دال مساو لمثلث الف ميم دال، تكون نسبة السطح الذي يحيط به خطا الف حا وطا با إلى السطح الذي يحيط به خطا الف حا وحا دال كنسبة المخمس إلى المثلث. ونسبة السطح الذي يحيط به خطا الف حا وطا با إلى السطح الذي يحيط به خطا الف حا وحا دال كنسبة با طا إلى دال حا. فنسبة اثنتي عشرة مرة مثل با طا إلى عشرين مرة مثل دال حا كنسبة اثني عشر مخمسًا إلى عشرين مثلثًا[306]. وذلك هو نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة. واثنتا عشرة مرة مثل با طا هي عشرة مثل با جيم، وذلك أن با طا خمسة أمثال طا جيم. وبا جيم مثل طا جيم ستّ مرات. فستة أمثال با طا مساوية لخمسة أمثال با جيم. وإذا ضعفنا ذلك، كان اثنتا[307] عشرة مرة با طا مساوية لعشرة أمثال با جيم. وعشرون مرة مثل دال حا هي عشر مرات مثل دال جيم. وذلك أن خط دال ميم مثلا خط دال حا. فنسبة عشرة أمثال با جيم إلى عشرة أمثال دال ميم[308] هي كنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة، التي هي كنسبة[309] با جيم إلى دال ميم، التي هي كنسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.

---

[299]– لمثلي مثلث الف با دال. H: لمثلثي الف با جيم دال.

[300]– وطا جيم. H: وزيد بعدها الجملة التالية : "ولذلك يكون مثلا السطح الذي يحيط به خطا الف زاي وطا جيم مساويين للسطح الذي يحيط به خطا الف زاي وحا طا".

[301]– لأن. H: أن.

[302]– مشترك. H: المشترك.

[303]– ها حا. H: ها جيم.

[304]– كاف جيم. H: كاف حا.

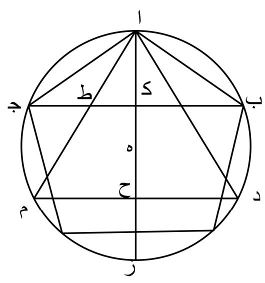
[305]– خط. H: خطا.

[306]– مثلثًا. H: مثلث.

[307]– اثنتا. H: ثني.

[308]– دال ميم. H: زيدت بعدها الجملة التالية : "التي هي كنسبة با جيم[308] إلى دال ميم".

[309]– التي هي كنسبة. H: كنسبة.

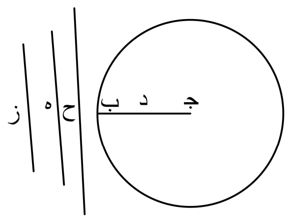


ز [المبرهنة 4]:

نريد أن نُبيّن أنه، إذا قُسِم خط ما مستقيم على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن نسبة الخط الذي يُقوي على المربع الكائن من جميع الخط، مع المربع الكائن من القسم الأعظم، إلى الخط الذي يُقوي على المربع الكائن من الخط كله، مع المربع الكائن من القسم الأصغر، كنسبة ضلع[310] المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة.

[مثال ذلك]:

فلتكن دائرة تحيط بمخمس ذي الاثنتي عشرة قاعدة وبمثلث[311] ذي العشرين قاعدة اللذين يُرسمان في دائرة واحدة، وهي الف با. وليكن مركزها نقطة جيم. ونخرج من نقطة جيم إلى الخط المحيط بالدائرة خط با جيم، كيف ما خرج، ونقسمه على نسبة ذات وسط وطرفين على نقطة دال. وليكن قسمه الأطول جيم دال. فخط جيم دال هو ضلع المعشر الذي يُرسم في هذه الدائرة. فليكن ضلع ذي العشرين قاعدة خط ها وضلع ذي الاثنتي عشرة قاعدة خط زاي وضلع المكعب خط حا. فخط ها هو ضلع المثلث المتساوي الأضلاع وخط زاي هو ضلع المخمس الذي يُخَط في تلك الدائرة، وخط زاي هو القسم الأعظم من خط حا إذا قُسم على نسبة ذات وسط وطرفين.



[برهان]:

وذلك أن خط ها، المساوي[312] لضلع المثلث المتساوي الأضلاع، يُقوي على ثلاثة أمثال المربع الكائن من خط با جيم. فالمربع الكائن من ها ثلاثة أمثال المربع الكائن من خط با جيم. والمربعان الكائنان من با جيم وبا دال ثلاثة أمثال مربع جيم دال. فنسبة مربع ها إلى مربع با جيم كنسبة مربعي با جيم وبا دال إلى مربع جيم دال[313]. فإذا بدّلنا، كانت نسبة مربع ها إلى مربعي با جيم و با دال[314] كنسبة مربع با جيم إلى مربع جيم دال. ونسبة المربع الكائن من با جيم إلى مربع جيم دال كنسبة مربع حا إلى مربع زاي. فإذا قُسم خط حا[315] على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن القسم الأعظم من قسميه مساو لخط زاي. فنسبة[316] مربع ها إلى مربعي با جيم وجيم دال[317] كنسبة مربع حا إلى مربع زاي. وإذا

[310] – ضلع. H: الكلمة ناقصة.

[311] – بمثلث. H: مثلث.

[312] – المساوي. H: مساو.

[313] – فنسبة مربع ها إلى مربع با جيم كنسبة مربعي با جيم وبا دال إلى مربع جيم دال. H: الجملة ناقصة.

[314] – وبا دال. H: الكلمات ناقصة.

[315] – حا. H: الكلمة ناقصة.

[316] – فنسبة. H: فنسبة إذا.

بدّلنا، كانت نسبة المربع الكائن من حا إلى مربع ها كنسبة مربع زاي إلى مربعي با جيم وبا دال[318] //H: 122ظ//. والمربع الكائن من زاي مساو لمربعي با جيم وجيم دال[319]. وذلك أن ضلع المخمس يُقوي على ضلع المسدس وضلع المعشر. فنسبة مربع حا إلى مربع ها كنسبة مربعي با جيم وجيم دال إلى مربعي با جيم ودال با. ونسبة مربعي با جيم وجيم دال إلى مربعي جيم با وبا دال[320] كنسبة المربعين الكائنين من الخط كله ومن القسم الأعظم من أي خط قُسم على نسبة ذات وسط وطرفين إلى مربعي الخط كله ومن القسم الأصغر منه. فنسبة حا إلى ها كنسبة الخط الذي يُقوي على مربعي الخط كله والقسم الأعظم منه إلى الخط الذي يُقوي على مربعي الخط كله والقسم الأصغر منه. وخط حا هو ضلع المكعب، وخط ها هو ضلع ذي العشرين قاعدة.

فإذا قُسم خط مستقيم على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن نسبة الخط الذي يُقوي على المربعين الكائنين من الخط كله ومن القسم الأعظم إلى الخط الذي يُقوي على مربعي[321] الخط كله والقسم الأصغر، كنسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة اللذين يُرسمان في كرة واحدة. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.

ح [المبرهنة 5]:

نريد أن نُبيّن أن نسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة كنسبة مجسم ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى مجسم ذي العشرين قاعدة.

البرهان:

وذلك أن مخمس ذي الاثنتي عشرة قاعدة ومثلث ذي العشرين قاعدة اللذين يُرسمان في كرة واحدة تحيط بهما دائرة واحدة. والدوائر المتساوية التي في الكرة، بعدها من المركز بعد متساو[322]. فالأعمدة التي تخرج من مركز الكرة إلى سطوحها متساوية، وهي تقع على مركز هذه الدائرة. فتكون الأعمدة الواقعة من مركز الكرة على سطوح الدوائر المحيطة بمخمسات ذي الاثنتي عشرة قاعدة، وهي على سطوح الدوائر المحيطة بمثلثات ذي العشرين قاعدة، متساوية.

فإذا كانت هذه الأعمدة متساوية، فإن المخروطات[323] التي قواعدها مخمسات ذي الاثنتي[324] عشرة قاعدة ورأسها مركز الكرة والمخروطات التي قواعدها مثلثات ذي العشرين قاعدة ورأسها مركز الكرة، ارتفاعاتها متساوية. والمخروطات المتساوية الارتفاع، فإن نسبتها بعضها إلى بعض كنسبة قواعدها بعضها إلى بعض. فنسبة المخمس منها إلى المثلث كنسبة المخروط الذي قاعدته مخمس ذي الاثنتي عشرة قاعدة ورأسه[325] مركز الكرة إلى المخروط الذي قاعدته مثلث[326] ذي العشرين قاعدة ورأسه مركز الكرة. ونسبة الاثني عشر مخمسًا إلى العشرين مثلثًا كنسبة الاثني عشر مخروطًا، التي قواعدها مخمسات، إلى العشرين مخروطًا التي قواعدها مثلثات. والاثنا عشر مخمسا هي سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة. والعشرون مثلثًا هي سطح ذي العشرين قاعدة. فنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة[327] قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة الاثني عشر مخروطًا، التي قواعدها مخمسات، إلى العشرين مخروطًا التي قواعدها مثلثات. والاثنا عشر مخروطًا التي قواعدها مخمسات هي مجسم ذي الاثنتي عشرة قاعدة. والعشرون مخروطًا التي قواعدها مثلثات هي مجسم ذي العشرين قاعدة. فنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة مجسم ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى مجسم[328] ذي العشرين قاعدة. وقد كان تبيّن أنها كنسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة. فنسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة كنسبة مجسم ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى مجسم ذي العشرين قاعدة. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.

---

[317]– با دال. H: جيم دال.

[318]– با دال. H: دال.

[319]– جيم دال. H: جيم دال با.

[320]– با دال. H: جيم دال.

[321]– مربعي. H: قسمي.

[322]– بعد متساو. H: بعدا متساويا.

[323]– فإن المخرطات. H: فإن ارتفاعات المخروطات.

[324]– الاثنتي. H: اثنتي.

[325]– وأسه. H: رأسهما.

[326]– مثلث. H: قاعدة مثلث.

[327]– الاثنتي عشرة. H: العشرين.

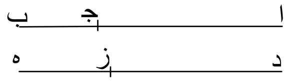
[328]– مجسم. H: سطح.

[المأخوذة المُلحقة]:

فأما أنه إذا كان خطان مستقيمان وقُسما على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن الأشياء التي تقدّم ذكرها متناسبة فيهما، فإنه يتبيّن كما أصِف:

[مثاله]:

لنقسم خط الف با المستقيم على نسبة ذات وسط وطرفين على نقطة جيم. وليكن قِسمه الأعظم الف جيم. وكذلك أيضا نقسم خط دال ها على نسبة ذات وسط وطرفين على نقطة زاي. وليكن قسمه الأعظم دال زاي. فأقول إن نسبة جميع الف با إلى قسمه الأعظم، الذي هو الف جيم، كنسبة جميع خط دال ها إلى قسمه //H: 123و// الأعظم الذي هو دال زاي.



برهانه:

أن السطح الذي يحيط به خطا الف با وبا جيم مساو للمربع الكائن من خط الف جيم. والسطح الذي يحيط به خطا[329] دال ها وها زاي مساو للمربع الكائن من دال زاي. فنسبة السطح الذي يحيط به الف با وبا جيم إلى المربع الكائن من الف جيم كنسبة السطح الذي يحيط به خطا دال ها وها زاي إلى المربع الكائن من دال زاي. ولذلك تكون نسبة أربعة أمثال السطح الذي يحيط به خطا الف با وبا جيم إلى المربع الكائن من الف جيم كنسبة أربعة أمثال السطح الذي يحيط به خطا دال ها وها زاي إلى مربع دال زاي. وإذا ركّبنا، كانت نسبة أربعة أمثال السطح الذي يحيط به خطا الف با وبا جيم مع المربع الكائن من الف جيم إلى المربع الكائن من الف جيم كنسبة أربعة أمثال السطح الذي يحيط به خطا دال ها وها زاي مع المربع الكائن من دال زاي إلى المربع الكائن من دال زاي. وتكون، لذلك نسبة المربع الكائن من خطي الف با وبا جيم، مجموعين، إلى المربع الكائن من الف جيم كنسبة المربع الكائن من خطي دال ها وها زاي، مجموعين، إلى المربع الكائن من دال زاي. وتكون[330]، لذلك، نسبة خطي الف با وبا جيم، مجموعين، إلى خط الف جيم كنسبة خطي دال ها وها زاي، مجموعين، إلى دال زاي. وإذا ركّبنا، كانت نسبة خطي الف با وبا جيم مع الف جيم إلى الف جيم كنسبة خطي دال ها وها زاي مع دال زاي إلى دال زاي. وخطا الف با وبا جيم[331] مع الف جيم مثلا خط الف با. وخطا دال ها وها زاي مع دال زاي مثلا خط دال ها. فإذا أخذنا النصف من المقدّمات، كانت نسبة الف با إلى الف جيم كنسبة دال ها إلى دال زاي. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.

[مراجعة 1]:

فإذ قد تبيّن ذلك، فإنه يتبيّن أنه إذا كان خط ما مستقيم وقُسم على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن نسبة الخط الذي يُقوي على مربع الخط كله مع مربع القسم الأعظم من قسميه، إلى الخط الذي يُقوي على مربع ذلك الخط كله مع مربع القسم الأصغر منه، كنسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة.

وقد تبيّن أيضا أن نسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة، المرسومين في كرة واحدة، كنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة [332].

وقد تبيّن أيضا أن نسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة مجسم ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى مجسم ذي العشرين قاعدة، لأن الدائرة التي تحيط بمخمس ذي الاثنتي عشرة قاعدة مساوية للدائرة التي تحيط بمثلث ذي العشرين قاعدة.

وهو بيّن أنه إن رُسم في كرة واحدة شكل[333] ذو اثنتي عشرة قاعدة وشكل ذو عشرين قاعدة، فإن نسبة ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى ذي العشرين قاعدة كنسبة خط يُقوي على مربع خط ما مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين مع المربع الكائن من قِسمه الأعظم إلى الخط الذي يُقوي على مربع ذلك الخط المقسوم مع مربع قِسمه الأصغر[334].

---

[329]– الف وبا جيم مساو للمربع الكائن من خط الف جيم والسطح الذي يحيط به خطا. H: الجملة ناقصة.

[330]– فتكون. H: وتكون.

[331]– وخطا الف با وبا جيم. H: وخط الف با مع الف جيم.

[332]– وقد تبيّن أيضا أن نسبة ... ذي العشرين قاعدة. H: الجملة ناقصة.

[333]– شكل. H: الكلمة ناقصة.

[مراجعة 2]:

وذلك أن نسبة ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى ذي العشرين قاعدة كنسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة. ونسبة سطح ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى سطح ذي العشرين قاعدة كنسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة.

ونسبة ضلع المكعب إلى ضلع ذي العشرين قاعدة كنسبة الخط الذي يُقوي على مربع خط ما، أي خط كان، مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين، مع مربع قسمه الأعظم، إلى مربع ذلك الخط كله مع مربع قِسمه الأصغر.

فتكون نسبة ذي الاثنتي عشرة قاعدة إلى ذي العشرين قاعدة، اللذين يُخطّان في كرة واحدة، كنسبة الخط الذي يُقوي على مربع خط ما، أي خط كان، مع مربع قِسمه الأعظم، إذا هو قُسم على نسبة ذات وسط وطرفين، إلى مربع ذلك الخط كله مع مربع قِسمه الأصغر. وذلك ما أردنا أن نُبيّن.

FIN DU LIVRE XIV

[334] - الأصغر. H: الأعظم.

4. Traduction du texte arabe du Livre XIV dans la famille du manuscrit Téhéran 3586

LE QUATORZIEME LIVRE D'HYPSICLES AJOUTE AU LIVRE D'EUCLIDE SUR LES ELEMENTS TRADUCTION DE QUSṬĀ IBN LŪQĀ

[Préface]

Basilides de Tyr, ô Protarque, lorsqu'il vint à Alexandrie, il y séjourna avec mon père, pour la plus grande <partie> de son séjour à cause de son affinité pour les mathématiques. Et ils étaient à la recherche du livre d'Apollonius qui donne le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre. Et ils s'imaginaient qu'Apollonius ne l'avait pas corrigé et, selon ce que j'ai entendu du père, ils l'ont écrit et corrigé.

Puis, après cela, j'ai trouvé un autre livre, écrit par Apollonius, contenant des démonstrations exactes donnant le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre, inscrits[335] dans une même sphère. Je me suis alors immensément réjoui pour ce qu'il y avait comme perception des questions nobles. L'intention d'Apollonius dans cela semble être universelle parce les <choses> s'entourent les unes aux autres comme les choses universelles.

Et j'ai pensé te confier ce que j'ai écrit sur cela après une fatigue intense. Et notre opinion est que tu devrais l'enseigner en l'évoquant dans les choses où l'on a recours à l'expérience, et ce à cause de ta prééminence dans les mathématiques et en particulier en géométrie. <Comme j'ai voulu> te détailler cela, par affection et prévenance, à cause de ton amitié avec mon père et de ton jugement bienveillant sur nous, et ce au moment où nous commençons le livre que nous avons évoqué précédemment.

1 = [Proposition 1]

Toute perpendiculaire sortant du centre d'un cercle vers le côté du pentagone qui est dans le cercle est comme la moitié du côté du décagone et la moitié du côté de l'hexagone <pris> ensemble, qui sont dans le cercle.

Exemple de cela :

Le côté du pentagone du cercle ABG est la ligne BG; et la perpendiculaire sortant du centre du cercle vers le côté du pentagone, la ligne DE; et D le centre du cercle. Et nous sortons la ligne DE en alignement jusqu'au point Z de la circonférence du cercle et nous sortons la ligne GZ. L'arc GZ est la moitié de l'arc GB et l'arc GB est le cinquième du cercle. Donc l'arc GZ est le dixième du cercle. Et DEZ est la corde du sixième du cercle.

---

[335] Littéralement : « dessinés »

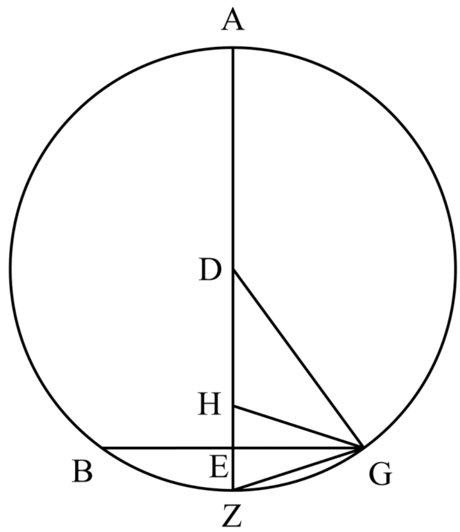
Je dis que la ligne DE est comme la moitié de la ligne DZ et la moitié de la ligne GZ <prises> ensemble.

Preuve de cela :

Nous sortons la ligne DG et nous séparons de la ligne DE la ligne DH égale à la ligne EZ et nous joignons GH. L'ensemble de la circonférence du cercle est cinq fois l'arc GZB et l'arc AGZ est la moitié du cercle et l'arc GZ est la moitié de l'arc GZB. Donc l'arc AGZ est cinq fois l'arc GZ. Donc l'arc AG est quatre fois l'arc GZ. Donc l'angle ADG est quatre fois l'angle ZDG. Et l'angle ADG est deux fois l'angle DZG parce qu'il est extérieur au triangle DZG. L'angle DZG est donc deux fois l'angle ZDG. Et ZE est comme EH, et l'angle HEG est droit. Donc la ligne GE est perpendiculaire à HZ. Donc la ligne GH est comme GZ. Et l'angle GHZ est comme l'angle HZG. Donc l'angle GHZ est comme deux fois l'angle GDZ et il est extérieur au triangle GDH. Donc l'angle DGH est comme l'angle GDH. Donc les deux lignes DH, GH sont égales. Donc la ligne DH est comme la ligne GZ. Et HE est comme EZ. Donc tout EZ, ZG est comme tout DH, HE. Donc tout DZ, ZG est comme deux fois DE. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

[Ajout à la Proposition 1]

Il a été montré, dans le treizième Livre, que la perpendiculaire sortant du centre du cercle vers le côté du triangle du cercle est la moitié du segment sorti du centre du cercle vers sa circonférence. Donc la perpendiculaire sortant du centre vers le côté du pentagone est égale à la perpendiculaire sortant du centre vers le côté du triangle et à la moitié du côté du décagone, <pris> ensemble.



[Transition]

Et comme nous voulons démontrer ce qu’a indiqué Aristée, dans le livre sur lequel est inscrit l’établissement des mesures des cinq figures, et Apollonius, dans la seconde version, sur la similitude entre le dodécaèdre et l’icosaèdre, puisqu’il dit que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l’icosaèdre est comme le rapport du dodécaèdre à l’icosaèdre, à cause du fait que la ligne tracée du centre du cercle du pentagone du dodécaèdre, vers sa circonférence, est comme <la ligne> tracée du centre du cercle du triangle de l'icosaèdre, il nous faut présenter, avant cela, ce qui rend ce propos exact. Nous disons :

2 = [Lemme 1/2]

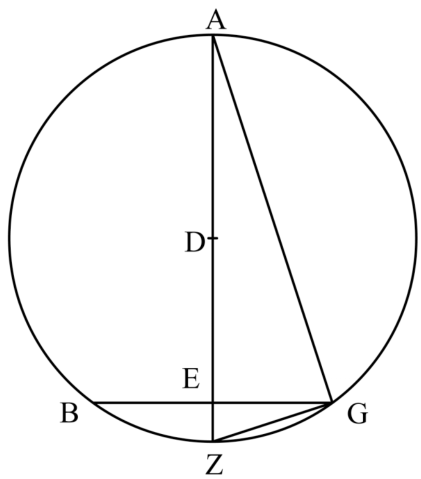
Le carré du côté du pentagone et le carré du côté sous-tendant l'angle du pentagone inscrit dans le cercle sont, <pris> ensemble, comme cinq fois le carré de la moitié du diamètre du cercle[336].

Exemple de cela :

<Dans> le cercle ABG, on a sorti le côté d'un pentagone, et c'est la ligne BG. Et nous sortons le diamètre ADEZ <qui> coupe BG en deux moitiés au point E, et nous joignons G, Z. La ligne GZ est la corde d'un dixième du cercle. Donc l'arc GZ est l'arc d'un dixième du cercle. Il reste l'arc AG <qui est> les deux cinquièmes du cercle. Donc, la ligne AG sous-tend l'angle du pentagone. Je dis que le carré de AG et le carré de GB, <pris> ensemble, sont cinq fois le carré de DB.

Preuve de cela :

DZ est la moitié de AZ. Donc, le carré de AZ est quatre fois le carré de DZ. Et le carré de AZ est comme le carré de AG et le carré de GZ, <pris> ensemble, parce que l'angle AGZ est droit. Donc les deux carrés AG, GZ, <pris> ensemble, sont quatre fois le carré de DZ. Que le carré de DZ soit commun. Le carré de AZ et le carré de DZ, <pris> ensemble, sont cinq fois le carré DZ. Et le carré de AG, le carré de GZ et le carré de DZ, ensemble, sont cinq fois le carré de DZ.



Or la ligne GB, qui est la corde du cinquième <du cercle>, est en puissance de GZ, qui est la corde du dixième, et de DZ, qui est la corde du sixième, <prises> ensemble. Donc, le carré de AG et le carré de GB, <pris> ensemble, sont comme le carré de AG, le carré de GZ et le carré de DZ, <pris> ensemble.

Donc, les deux carrés de AG, qui sous tend l'angle du pentagone, et de GB, qui est la corde du cinquième, <pris> ensemble, sont cinq fois le carré de DZ. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

---

[336] Glose marginale [Téhéran 3586, f. 235b] : « *Nous avons trouvé ceci dans une autre copie, ô Zosime : "la perpendiculaire sortant du centre du cercle vers le pentagone qui est la base du dodécaèdre est égale à la perpendiculaire sortant du centre du cercle vers le triangle qui est la base de l'icosaèdre, parce que le cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre est égal au cercle circonscrit au triangle de l'icosaèdre, comme nous le montrerons après. Et, <pour> les cercles égaux qui sont sur la sphère, les perpendiculaires sortant du centre de la sphère vers leurs surfaces sont égales. Donc, les perpendiculaires sortant du centre de la sphère vers le pentagone du dodécaèdre et vers le triangle de l'icosaèdre sont égales*" ».

Et ce qui sous-tend l'angle du pentagone du dodécaèdre qui est <inscrit> dans la sphère, c'est le côté du cube qui est <inscrit> dans la sphère. Il a donc été démontré que le carré du côté du cube qui est <inscrit> dans la sphère et le carré du côté du pentagone du dodécaèdre qui est <inscrit> dans la sphère, <pris> ensemble, sont cinq fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre qui est <inscrit> dans la sphère.

3 = [Proposition 2]

Nous voulons démontrer que le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, qui sont inscrits dans une même sphère, sont entourés par un même cercle.

Exemple de cela :

Nous supposons que le diamètre de la sphère est AB. On y inscrit le dodécaèdre et l'icosaèdre. Que GDEWZ soit le pentagone du dodécaèdre et TYK le triangle de l'icosaèdre. Je dis que le cercle circonscrit au pentagone GDEWZ est égal au cercle circonscrit au triangle TYK.

Preuve de cela :

Nous joignons DZ et nous traçons la ligne LM, rectiligne, et nous supposons que son carré est le cinquième du carré de la ligne AB. Il a été démontré, dans le *treizième Livre*[337] que le carré du demi-diamètre du cercle dont le côté du pentagone est le côté du triangle de l'icosaèdre, inscrit dans la sphère, est comme le cinquième du carré du diamètre de la sphère. Donc la ligne LM est la moitié du diamètre du cercle dont le côté du pentagone est le côté du triangle de l'icosaèdre.

Nous divisons la ligne LM selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes. La partie la plus grande sera LN et la plus petite MN. La ligne LM est donc la corde du sixième du cercle, et LN la corde de son dixième. Et le carré de la ligne AB est trois fois le carré de DZ, parce que DZ est le côté du cube de la sphère tracée sur le diamètre AB. Donc, trois fois le carré de DZ est égal à cinq fois le carré de LM.

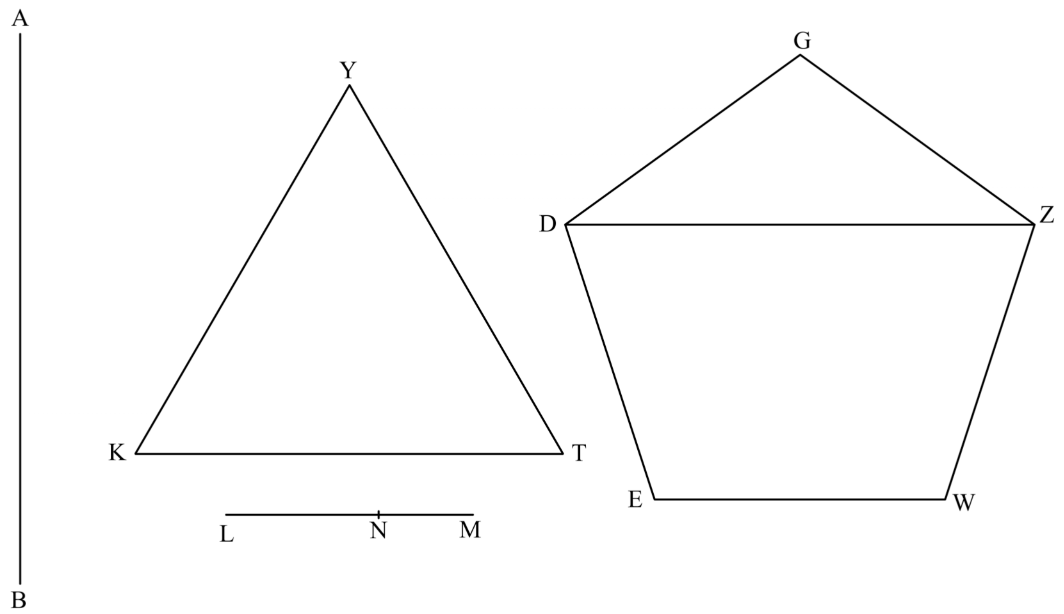
Et il a été démontré, dans le *treizième Livre*, que la ligne qui sous-tend l'angle du pentagone, si on en sépare le côté du pentagone, sera divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes. Et la partie la plus grande est le côté du pentagone. Donc, le rapport de la ligne GD à la ligne DZ est comme le rapport de la ligne LN à la ligne LM. Donc, ce qui résulte de cinq fois le carré de LM et de cinq fois le carré de LN, <pris> ensemble, est comme le résultat de trois fois le carré de DZ et trois fois le carré de GD, <pris> ensemble. Et le côté YT est en puissance du côté LM et du côté LN. Donc cinq fois le carré de YT est égal à trois fois le carré de DZ et à trois fois le carré de GD, <pris> ensemble[338].

---

337 Littéralement : *Propos*.

338 Glose marginale [Téhéran 3586, f. 236b] : "*L'origine de cela est ceci : si deux lignes sont, chacune, divisées selon une moyenne et deux extrêmes, le rapport de la ligne à la ligne est comme le rapport de la partie la plus grande de l'une d'elles à la partie la plus grande de l'autre. Donc le rapport du carré de LM*

Et il a été démontré, dans le *treizième Livre*, que la corde du triangle est en puissance de trois fois la moitié du diamètre. Donc, le carré de la ligne KT est trois fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au triangle YTK. Donc, cinq fois le carré de KT est égal à quinze fois le carré de la moitié du diamètre circonscrit au triangle YTK. Et nous avons démontré, dans ce *Livre*, que le carré du côté du pentagone et le carré du côté qui sous-tend l'angle du pentagone, <pris> ensemble, sont cinq fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au pentagone. Donc, trois fois le carré de DZ et trois fois le carré de GD sont quinze fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au pentagone GDEWZ. Donc quinze fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au triangle KTY est égal à quinze fois le carré du demi-diamètre du cercle circonscrit au pentagone GDEWZ. Donc, la moitié du diamètre du cercle GDEWZ est comme la moitié du diamètre du cercle YTK. Les deux cercles sont donc égaux. Et c'est ce que nous voulions démontrer.



au carré de DZ est comme le rapport de LN au carré de GD. Alors le rapport de tous les antécédents à tous les conséquents est comme le rapport de l'un des antécédents à l'un des conséquents. Donc le rapport du carré de LM avec le carré de LN aux carrés de DZ, DG est comme le carré de LM au carré de DZ. Et puisque le carré de LM est le cinquième du carré du diamètre de la sphère et que le carré de DZ est son tiers, le rapport du carré de LM au carré de DZ est comme le rapport du cinquième au tiers. Donc le rapport des deux carrés LM, LN aux deux carrés DZ, DG est comme le rapport du cinquième au tiers. Donc cinq fois les deux carrés de LM, LN sont égaux à trois fois les deux carrés DZ, DG".

4 = [Lemme 2/3 <a>]

La surface[339] qui est égale à trente fois le rectangle résultant du produit de la perpendiculaire sortie du centre du cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre vers le côté du pentagone, par le côté du pentagone, est égale à la surface du dodécaèdre.

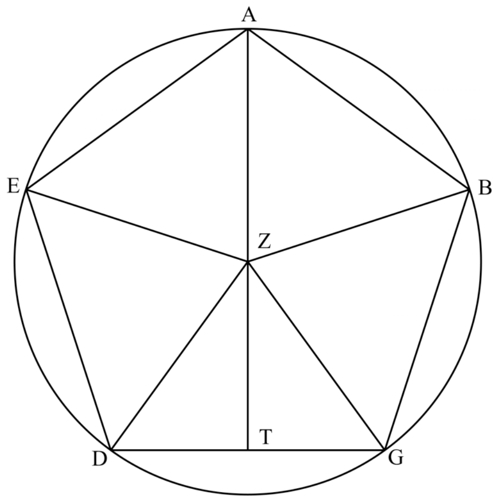
Exemple de cela :

Le cercle ABGDE est circonscrit au pentagone du dodécaèdre, et c'est le pentagone ABGDE. Le centre du cercle est le point Z, et l'on a sorti, à partir de lui, une perpendiculaire jusqu'au point T de la ligne GD. Je dis que trente fois GD par TZ est égal à la surface du dodécaèdre dont le pentagone est le pentagone ABGDE.

Preuve de cela :

GD par TZ est deux fois le triangle ZGD. Donc la ligne GD par la ligne ZT est le cinquième du double du pentagone ABGDE. Et la surface du dodécaèdre est douze fois ABGDE. Donc six par le double du pentagone ABGDE, c'est six fois ce qui résulte du produit de GD par ZT, cinq fois. Donc trente fois GD par ZT c'est comme la surface du dodécaèdre.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.



5 = [Lemme 2/3 <b>]

Et, de même, la surface qui est égale à trente fois le rectangle[340] résultant du produit de la perpendiculaire sortant du centre de ce cercle jusqu'au côté du triangle qui y est <inscrit> — et c'est le triangle de l'icosaèdre qui est circonscrit par la sphère qui circonscrit le dodécaèdre dont le pentagone est circonscrit par ce cercle —, par le côté du triangle, est égal à la surface de l'icosaèdre.

Exemple de cela :

Le cercle ABG est circonscrit au triangle de l'icosaèdre, et c'est le triangle ABG. Le centre du cercle est le point D, et l'on a sorti de lui une perpendiculaire jusqu'au point E sur la ligne BG. Je dis que trente fois le produit de BG par DE est comme la surface de l'icosaèdre dont le triangle est circonscrit par le cercle ABG.

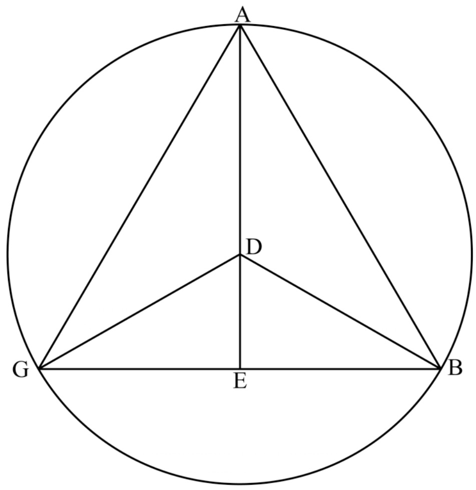
---

[339] Dans les trois manuscrits utilisés, on lit : « *le carré* ».
[340] Littéralement « *le carré* ».

Preuve de cela :

Le produit de DE par BG est deux fois le triangle DBG. Trois fois la ligne DE par BG est comme deux fois le triangle ABG. Et trente fois DE par BG est égal à vingt fois le triangle ABG. Et vingt fois le triangle ABG est égal à la surface de l'icosaèdre dont le triangle est ABG. Donc trente fois la ligne DE par la ligne BG est égale à la surface de l'icosaèdre.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.



[Lemme 2/3 <c>]

Donc le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de la trentième partie de la surface du dodécaèdre à la trentième partie de la surface de l'icosaèdre. Donc, le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de la surface qui résulte <du produit> de ZT par DG à la surface qui résulte <du produit> de DE par BG.

Il a donc été démontré que le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre, qui sont dans une même sphère, est comme le rapport du rectangle qui résulte <du produit> de la perpendiculaire sortant du centre du cercle -qui est circonscrit au pentagone du dodécaèdre-, vers le côté du pentagone, par le côté du pentagone, à ce qui résulte <du produit> de la perpendiculaire sortant du centre du cercle vers le côté du triangle de l'icosaèdre, circonscrit par cette sphère, par le côté du triangle. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

6 = [Proposition 3]

Nous voulons montrer que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont circonscrits par une même sphère, est comme le rapport du côté du cube, circonscrit par cette sphère, au côté du triangle de l'icosaèdre.

Exemple de cela :

Nous traçons le cercle ABG qui circonscrit le triangle de l'icosaèdre, dont le côté est AB, et le pentagone du dodécaèdre, dont le côté est la ligne AG. Le centre du cercle est le point D, et nous sortons, de D, une perpendiculaire jusqu'au point E de la ligne AB et nous sortons, également de D, une perpendiculaire jusqu'au point Z de la ligne AG et nous la prolongeons, en alignement, jusqu'au point W de la circonférence du cercle. Nous joignons AW et nous traçons le côté du cube qui est circonscrit par la sphère circonscrite au dodécaèdre et à l'icosaèdre dont le côté de l'icosaèdre est la ligne AB, et dont le côté du dodécaèdre est le côté AG, et c'est la ligne *t*. Je dis que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de *t* à la ligne AB.

Preuve de cela :

L'ensemble des deux lignes DW, WA si nous le divisons selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, la partie la plus grande sera DW parce que DW est la corde du sixième d'un cercle et la ligne AW est la corde du dixième d'un cercle. Et nous avons démontré, dans ce qui précède de ce livre, que la ligne DZ est la moitié des deux lignes DW, WA, <prises> ensemble, et que la ligne DE est la moitié de la ligne DW, parce que DW est la moitié du diamètre du cercle, et DE est une perpendiculaire <sortant> du centre sur le côté du triangle. C'est donc la moitié de la moitié du diamètre.

Et il a été démontré, dans le treizième Livre, que le côté du cube, s'il est divisé selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, sa partie la plus grande est le côté du pentagone du dodécaèdre qui est circonscrit par la sphère qui circonscrit le cube. Et DE est la moitié de DW ; et DZ est la moitié de DW et WA <pris> ensemble. Et <l'ensemble> DW, WA a été divisé selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes. Et sa partie la plus grande est DW. Donc la ligne DZ, si elle est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, sa partie la plus grande est égale à la ligne DE. Donc le rapport de la ligne *t* à la ligne AG est comme le rapport de DZ à DE.

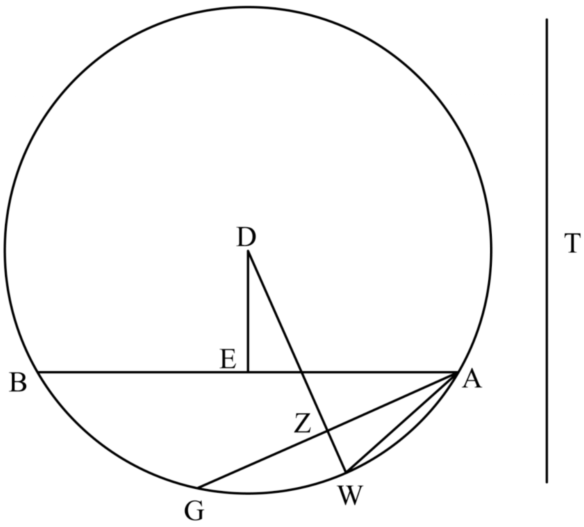
Donc la surface qui résulte du <produit de> *t* par DE est égale à la surface qui résulte du <produit de> AG par DZ. Donc le rapport de la surface qui résulte du <produit de> *t* par DE à la surface qui résulte du <produit de> AB par DE est comme le rapport < du carré qui résulte de AG par DZ au carré qui résulte de AB par DE. Et le rapport du carré qui résulte de AG par DZ au carré qui résulte de AB par DE est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre. Donc, le rapport du carré qui résulte de t par DE au carré qui résulte de AB par DE est comme le rapport >[341] de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre.

Et <pour> deux lignes dont chacune est multipliée par une même ligne qui leur est commune, le rapport de l'une des deux surfaces qui en résultent à l'autre surface est comme le rapport de la ligne à la ligne. Que DE soit la <ligne> commune. Le rapport de la ligne *t* à la ligne AB est comme le rapport de la surface qui résulte <du produit> de la ligne *t* par DE à la surface qui résulte <du produit> de la ligne AB par DE. Le rapport de la ligne *t* à la ligne AB est donc comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre. Or, la ligne *t* est le côté du cube et la ligne AB est le côté du triangle de l'icosaèdre, qui sont circonscrits par une même sphère.

Donc le rapport du côté du cube au côté du triangle de l'icosaèdre est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont circonscrits par une <même> sphère. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

---

[341] <> om. *in mss,* mais préservée dans la marge du ms Uppsala, f. 196b ; voir *supra* II, B, § 2, note 131 et *infra,* ANNEXE, Tableau 4, note 120.



7 = [Lemme 3/3*aliter*]

Et pour démontrer cela d'une autre manière, nous <le> faisons précéder par <ceci> : La surface qui résulte <du produit> des trois quarts du diamètre par les cinq sixièmes de la ligne qui sous-tend le pentagone du cercle est égale au pentagone du cercle.

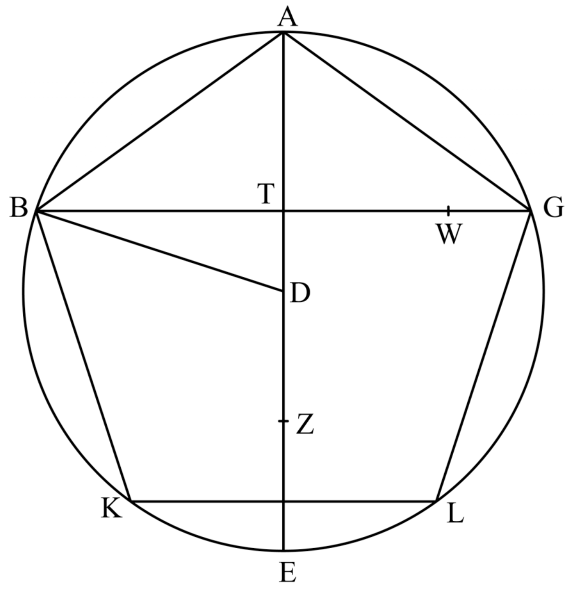
Exemple de cela :

Nous traçons le cercle ABG. Son diamètre est AE; et nous y inscrivons le pentagone BAGLK. Nous joignons BG et nous marquons le point[342] T, là où la ligne BG coupe le diamètre. Le centre du cercle est D; et nous joignons DB et nous divisons DE en deux moitiés au point Z; et nous divisons GT au point W, en prenant TW comme deux fois WG. Donc la ligne WB est cinq sixièmes de GB et AZ est trois quarts de AE. Je dis que le rectangle qui résulte <du produit> de AZ par BW est égal au pentagone ABKLG.

Preuve de cela :

TB est comme TG; et TG est comme trois fois GW; et DZ est la moitié de AD. Donc la ligne AZ est trois fois DZ; et AZ est comme une fois et demie AD; et GT est comme une fois et demie WT. Le rapport de AZ à AD est donc comme le rapport de GT à WT. Et GT est comme TB. Donc le rapport de AZ à AD est comme le rapport de TB à WT. Et le rectangle qui résulte <du produit> de AZ par TW est égal au rectangle qui résulte <du produit> de AD par BT. Et AD par BT est le double du triangle ABD; et le pentagone AGLKB est cinq fois le triangle ABD. Donc AZ par WT et AD par BT <pris> ensemble, c'est égal à quatre fois le triangle ABD. Et TB par DZ est comme le triangle ABD parce que DZ est la moitié de la base AD. Donc, l'ensemble AZ par WT, AD par BT et DZ par BT est égal au pentagone AGLKB. Or AZ par WB est égal à AZ par WT, AD par TB et DZ par BT <ensemble>. Donc AZ par WB est égal au pentagone ABKLG. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

[342] « *'alâma* » (marque, signe).



8 = [3*aliter*]

Nous voulons démontrer aussi que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont dans une même sphère qui les circonscrit, est comme le rapport du côté du cube, que circonscrit cette sphère, au côté de l'icosaèdre.

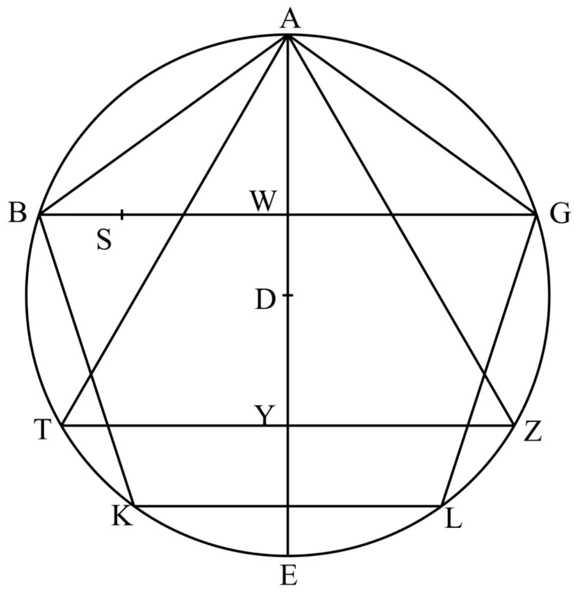
Exemple de cela :

Nous traçons le cercle ABG et nous y inscrivons le pentagone du dodécaèdre, et c'est le pentagone ABKLG, et le triangle de l'icosaèdre, et c'est le triangle ATZ. Nous joignons GB et nous sortons le diamètre AE qui coupe GB au point W; et le centre est D. Et nous marquons Y, là où ZT coupe le diamètre, et nous séparons de la ligne GB ses cinq sixièmes, et c'est la ligne GS. La ligne GB sous-tend l'angle du pentagone, et c'est le côté du cube, circonscrit par la sphère qui circonscrit le dodécaèdre. Je dis que le rapport de la ligne GB à la ligne ZT est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre dont le cercle ABG circonscrit leur pentagone et leur triangle.

Preuve de cela :

<Le produit de> AY par GS est égal au pentagone ABKLG; et <le produit de> AY par ZY est égal au triangle ATZ. Et puisque la ligne AY est commune à la ligne GS et à la ligne ZY, le rapport du pentagone ABKLG au triangle ATZ est comme le rapport de GS à ZY. Donc le rapport de douze fois GS à vingt fois ZY est comme le rapport de douze fois le pentagone ABKLG à vingt fois le triangle ATZ. Donc le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l’icosaèdre est comme le rapport de douze fois GS à vingt fois ZY. Or GS est cinq sixième de GB et ZY est la moitié de ZT. Et douze fois cinq est égal à dix fois six. Donc, dix fois GB est égal à douze fois GS. Et dix fois ZT est égal à vingt fois ZY. Donc, le rapport de dix fois GB, qui est le côté du cube, à dix fois

TZ, qui est le côté du triangle de l'icosaèdre, est comme le rapport de GB à ZT. Donc, le rapport de GB à ZT est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre que circonscrit une même sphère. Et c'est ce que nous voulions démontrer.



9 = [Proposition 4]

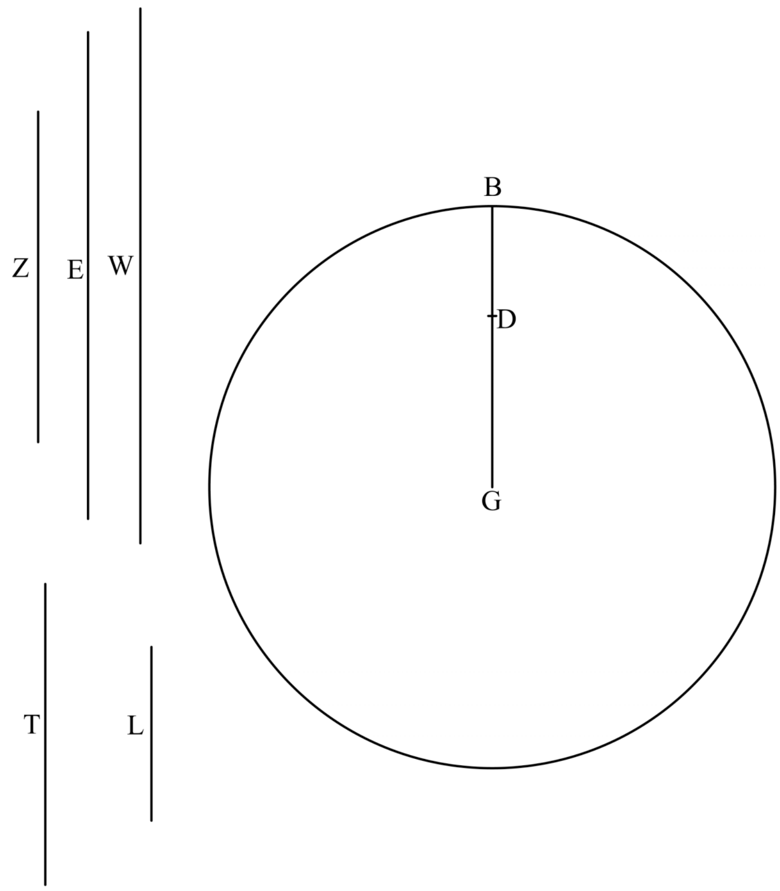
Nous voulons démontrer que <pour> toute ligne divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance de toute la ligne et de sa partie la plus grande à la ligne en puissance de toute la ligne et de sa partie la plus petite, est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre qui sont circonscrits par une même sphère.

Exemple de cela :

La ligne BG a été divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes au point D et la partie la plus grande est GD. Nous traçons autour du point G, et à une distance GB, le cercle AB. Et nous traçons la ligne *e*, côté du triangle du cercle AB, la ligne *z*, côté du pentagone du cercle AB et la ligne *w*, côté du cube circonscrit par la sphère qui est circonscrite à l'icosaèdre dont le côté est la ligne *e*. Nous traçons la ligne *t* qui est en puissance des deux lignes BG, BD et la ligne *l* qui est égale à la ligne DG. La ligne DG est donc le côté du décagone du cercle AB et la ligne BG est le côté de son hexagone, et DG est la partie la plus grande. La ligne z, qui est le côté du pentagone du cercle AB, est donc en puissance de la ligne BG et de la ligne DG, la plus grande. Et nous avions tracé la ligne *t* en puissance de la ligne BG et de la ligne BD, la <partie la> plus petite. Je dis que le rapport de la ligne *z* à la ligne *t* est comme le rapport de la ligne *w*, qui est le côté du cube, à la ligne *e*, qui est le côté de l'icosaèdre.

Preuve de cela :

La ligne *e* est en puissance de trois fois la ligne BG parce que la ligne *e* est le côté du triangle et la ligne BG est le côté de l'hexagone. Cela a été démontré dans le *treizième Livre*. Et il a été démontré là que toute ligne divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, la ligne en puissance de toute la ligne et de la partie la plus petite est en puissance de trois fois la partie la plus grande. Donc la ligne *t* est en puissance de trois fois la ligne DG. Et la ligne DG est comme la ligne *l*. Donc le rapport de la ligne *e* à la ligne BG est comme le rapport de la ligne *t* à la ligne *l*. Et si nous permutons, le rapport de la ligne *e* à la ligne *t* est comme le rapport de la ligne BG à la ligne *l*. Et la ligne *w*, si elle est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, sa partie la plus grande est *z*. Et cela a été démontré dans le treizième Livre. Donc, le rapport de la ligne *w* à la ligne *z* est comme le rapport de la ligne BG à la ligne *l*, parce que la ligne *l* est la partie la plus grande de BG ; et le rapport de BG à *l* est comme le rapport de *e* à *t*. Donc, le rapport de *e* à *t* est comme le rapport de *w* à *z*. Et si nous permutons, le rapport de *w* à *e* est comme le rapport de *z* à *t*. Et *z* est en puissance de BG, GD; et *t* est en puissance de BG, BD. Or, la ligne *w* est le côté du cube et la ligne *e* est le côté de l'icosaèdre, qui sont circonscrits par une même sphère. Et c'est ce que nous voulions démontrer.



10 = [Proposition 5]

Nous voulons démontrer que le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre qui sont circonscrits par une même sphère.

Preuve de cela :

Les cercles qui sont circonscrits au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre, qui sont dans une même sphère, sont égaux et leurs distances au centre de la sphère sont égales. Donc, les perpendiculaires qui sortent du centre de la sphère vers les surfaces des cercles et qui aboutissent aux centres des cercles circonscrits au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre, sont égales. Pour cela, les pyramides, dont les bases sont les pentagones du dodécaèdre et les pyramides dont les bases sont les triangles de l'icosaèdre, sont d'égales hauteurs. Et les pyramides d'égales hauteurs, le rapport de l'une à l'autre est comme le rapport de leurs bases, l'une à l'autre. Donc le rapport de la pyramide dont la base est le pentagone du dodécaèdre à la pyramide dont la base est le triangle de l'icosaèdre est comme le rapport du pentagone du dodécaèdre au triangle de l'icosaèdre.

Pour cela, le rapport de douze fois le pentagone du dodécaèdre à vingt fois le triangle de l'icosaèdre est comme le rapport de douze pyramides dont les bases sont les pentagones du dodécaèdre à vingt pyramides dont les bases sont les triangles de l'icosaèdre qui sont dans une même sphère. Or douze pentagones du dodécaèdre sont égaux à sa surface. Et douze pyramides, dont les bases sont ces pentagones, sont le volume du dodécaèdre. Et vingt triangles de l'icosaèdre sont égaux à sa surface. Et vingt pyramides, dont les bases sont ces triangles, sont le volume de l'icosaèdre. Donc le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont dans une même sphère, est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre.

Or, nous avions démontré que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont circonscrits par une même sphère, est comme le rapport du côté du cube circonscrit par cette sphère au côté de l'icosaèdre. Donc, le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre, qui sont dans une même sphère, est comme le rapport du côté du cube qui est dans cette sphère au côté du triangle de l'icosaèdre. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

11 = [Lemme SEMR]

Nous voulons démontrer que toutes les situations qui adviennent à la ligne divisée selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes au point G, et dont la partie la plus grande <est> AG, adviennent à toute ligne ayant cette division, je veux dire selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes.

[Exemple de cela] :

Nous divisons la ligne AB selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes au point G. Sa partie la plus grande est AG. Et nous divisons une ligne quelconque selon ce rapport, je veux dire selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes. Que ce soit la ligne DE et que le point Z la divise selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes et que <sa partie> la plus grande soit DZ. Je dis que toutes les situations qui adviennent à la ligne AB adviennent à la ligne DE.

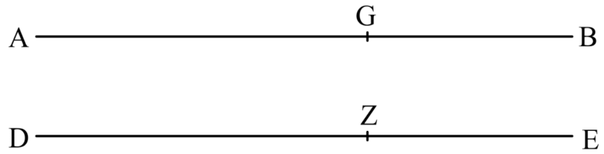
Preuve de cela :

Si nous les divisons selon un même rapport, je veux dire selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes, le rapport de AB à AG est comme le rapport de AG à GB. Et, par cette division, a été divisée DE. Donc le rapport de DE à DZ est comme le rapport de DZ à ZE. Donc le rapport de AB à AG est comme le rapport de DE à DZ. Donc ce qui résulte du produit de AB par BG est comme ce qui résulte du produit de AG par elle-même. Et, de même, ce qui résulte du produit de DE par EZ est comme ce qui résulte du produit de DZ par elle-même. Donc, pour cela, le rapport de ce qui résulte du produit de AB par BG à ce qui résulte du produit de AG par elle-même est comme le rapport de ce qui résulte du produit de DE par EZ à ce qui résulte du produit de DZ par elle-même.

Et de même le rapport de quatre fois ce qui résulte du produit de AB par BG à ce qui résulte du produit de AG par elle-même est comme le rapport de quatre fois ce qui résulte du produit de DE par EZ à ce qui résulte du produit de DZ par elle-même. Et de même, si nous composons, le rapport de ce qui résulte du produit de quatre fois AB par BG et du produit de AG par elle-même à ce qui résulte du produit de AG par elle-même est comme le rapport de ce qui résulte du produit de quatre fois DE par EZ et du produit de DZ par elle-même à ce qui résulte de DZ par elle-même.

Pour cela, le rapport qui résulte du produit de DE, EZ, <pris> ensemble, par lui-même, à DZ par lui-même, est comme le rapport qui résulte du produit de AB, BG, <pris> ensemble, par lui-même au produit de AG par lui-même. Et, pour cela, le rapport de AB, BG, <pris> ensemble, à AG est comme le rapport de DE, EZ, <pris> ensemble, à DZ. Et si nous composons, le rapport de AB, BG, <pris> ensemble, avec AG, à AG, est comme le rapport de DE, EZ, <pris> ensemble, avec DZ, à DZ. Pour cela, le rapport de AB à AG est comme le rapport de DE à ZD. Et, pour cela, le rapport de AB à AG est comme le rapport de DE à DZ. Et si nous permutons, le rapport de AB à DE est comme le rapport de AG à DZ et comme le rapport de BG à EZ.

Et il a donc été démontré que les situations qui adviennent à toute ligne divisée selon un rapport ayant une moyenne et deux extrêmes, sont les mêmes. Et c'est ce que nous voulions démontrer.



12 = [Récapitulations n° 1]

Il a été démontré que pour toute ligne divisée selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance de la ligne et de sa partie la plus grande, à la ligne en puissance de la ligne et de sa partie la plus petite, est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère.

Il a été également démontré que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont dans une même sphère, est comme le rapport du côté du cube, circonscrit par cette sphère, au côté de l'icosaèdre.

Il a été également démontré que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, circonscrits par une même sphère, est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre.

Il a été également démontré que le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre, circonscrits par la même sphère, est comme le rapport du côté du cube, circonscrit par cette sphère, au côté de l'icosaèdre.

Il découle également de cela que, pour toute ligne divisée selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance de la ligne et de sa partie la plus grande, à la ligne en puissance de la ligne et de sa partie la plus petite, est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre, circonscrits par une même sphère. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

<Ici> s'achève le quatorzième livre d'Hypsiclès, ajouté au <traité> d'Euclide. Gloire et grâce à Dieu.

FIN DU LIVRE XIV

5. Traduction du texte arabe du Livre XIV dans le manuscrit Rabat 1101

Au nom de Dieu, le Clément le miséricordieux

Que la prière et le salut de Dieu soient sur notre Maître Muhammad, son Prophète généreux et sur sa famille

Livre d'Hypsiclès sur le quatorzième Livre du Livre des *Eléments*

[Préface]

Basilides qui était un habitant de Tyr, ô Protarque, lorsqu'il fut à Alexandrie, il rencontra notre père qui avait avec lui un intérêt commun pour l'étude des sciences mathématiques. Il séjourna chez lui la plupart du temps de son absence. Ils ont lu et vérifié, à certains moments, ce qu'avait écrit Apollonius au sujet de la comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits[343] dans une même sphère, chacun à l'autre, et du rapport de chacun des deux à l'autre.

Et croyant que le livre écrit par Apollonius sur ce chapitre n'était pas correct, ils ont discuté les propos qui étaient dans ce livre, ils les ont corrigés et ils ont rédigé ce qu'ils avaient fait, selon ce que j'ai entendu de mon père.

Quant à moi, il m'est parvenu, après cela, un autre livre d'Apollonius dans lequel il a mis les propositions qu'il avait indiquées avec des démonstrations exactes. Et j'en ai tiré un immense profit à l'aide des choses que nous avons indiquées.

Quant au livre qu'a réalisé Apollonius sur cela, il nous est possible à tous de l'étudier et ce parce que c'est un livre qui est parvenu à de nombreuses personnes.

Quant à ce que nous avons réalisé, nous, après, et dans lequel nous avons expliqué avec soin tout ce qui se devait d'être expliqué, nous avons pensé te le dédicacer puisque tu as la capacité de juger ce qui se dit et de l'assimiler à cause de ta prééminence dans toutes les sciences mathématiques et en particulier dans la science de la géométrie, et à cause de tes nombreux liens avec notre père et de ta bonne opinion sur nous. Cela te réjouira d'entendre ce que nous allons dire.

Il est temps maintenant de conclure cette introduction et de nous engager dans ce que nous voulons évoquer.

1 = [Proposition 1]

Nous commençons par dire que la perpendiculaire sortant du centre d'un cercle vers le côté du pentagone qui est inscrit dans ce cercle, est égale à la moitié de la ligne qui est

[343] Littéralement : "tracé".

menée du centre de ce cercle vers la ligne qui l'entoure, avec la moitié du côté du décagone qui est inscrit dans ce cercle, si elles sont réunies.

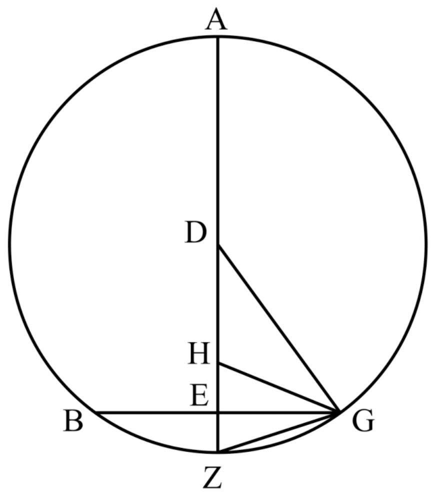
[Exemple de cela] :

Soit un cercle sur lequel il y a A, B, G. Soit, dans le cercle ABG, le côté d'un pentagone à côtés égaux, et c'est BG. Soit D le centre du cercle. De lui, menons vers BG la perpendiculaire DE, et nous menons la ligne EZ dans le prolongement de la ligne DE. Je dis que la ligne DE est égale à la moitié du côté de l'hexagone et du côté du décagone, qui sont inscrits dans ce cercle, s'ils sont ajoutés.

La preuve de cela :

Nous menons les deux lignes DG et GZ. Et soit la ligne EH égale à la ligne EZ. Nous joignons les deux points H, G à l'aide de la ligne GH. Comme tout AGZ {est la moitié du cercle}[344] et que la moitié de l'arc BZG est l'arc ZG, l'arc AGZ est cinq fois l'arc GZ. Donc l'arc AG est quatre fois l'arc ZG. Et le rapport de l'arc AG à l'arc ZG est comme le rapport de l'angle ADG à l'angle ZDG. Donc l'angle ADG est quatre fois l'angle ZDG. Et l'angle ADG est deux fois l'angle EZG. Donc l'angle EZG est aussi deux fois l'angle HDG. Et l'angle EZG est égal à l'angle EHG. Donc l'angle EHG est deux fois l'angle HDG. Donc la ligne DH est comme la ligne GH. Mais la ligne HG est comme la ligne ZG. Donc la ligne DH est égale à la ligne ZG. Et la ligne HE est aussi comme la ligne EZ. Donc la ligne ED est égale aux deux lignes EZ, ZG si elles sont réunies. Et nous considérons la ligne DE commune. Donc les deux lignes DZ, ZG si elles sont réunies, sont comme deux fois la ligne DE.

Quant à la ligne DZ, elle est égale au côté de l'hexagone; et la ligne ZG est le côté du décagone. Donc la ligne DE est égale à la moitié du côté de l'hexagone et du côté du décagone[345] qui sont inscrits dans ce cercle, s'ils sont réunis.



Et il a été démontré, dans une proposition dans le treizième Livre, que la perpendiculaire qui sort du centre du cercle vers le côté du triangle équilatéral qui est construit dans le cercle, est la moitié de la ligne qui sort du centre du cercle vers la ligne qui l'entoure.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.

[344] {} om. *in ms.*
[345] décagone] : corr. Djebbar. In ms : "hexagone".

[Transition]

Le pentagone qui est l'une des surfaces du dodécaèdre[346] et le triangle qui est l'une des surfaces de l'icosaèdre[347] sont circonscrits par un même cercle, si les deux figures sont, ensemble, construites dans une même sphère.

C'est Aristée qui a évoqué cela dans son livre intitulé « *Le livre de la comparaison des cinq figures les unes aux autres* ». Et Apollonius a indiqué, dans la seconde version qu'on a rapportée de lui au sujet de la comparaison du dodécaèdre à l'icosaèdre : je dis que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du dodécaèdre lui-même à l'icosaèdre. Et ce parce que la perpendiculaire issue du centre de la sphère vers le pentagone du dodécaèdre est comme la perpendiculaire issue de lui vers le triangle de l'icosaèdre.

Quant à nous, nous disons, à propos de cela, qu'il est circonscrit au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre qui sont inscrits dans une même sphère. Et je fais précéder cela par ce que je vais dire.

[Lemme 1/2]

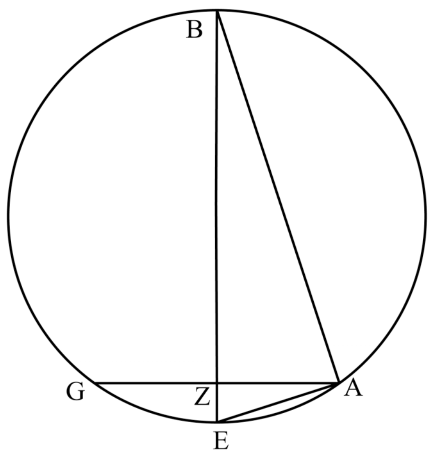
Si on construit dans un cercle un pentagone à côtés égaux, le carré du côté du pentagone et le carré résultant de la ligne droite qui sous-tend l'angle qu'entourent deux côtés du pentagone, s'ils sont réunis, sont cinq fois le carré de la moitié du diamètre du cercle.

[**Exemple de cela] :**

Soit un cercle sur lequel il y a A, B, G. Que l'on y construise le côté d'un pentagone, et c'est AG. Que le centre du cercle soit D. Nous menons de lui vers la ligne AG la perpendiculaire DZ et nous la prolongeons vers les deux points B et E, et nous joignons la ligne AB. Je dis que les deux carrés résultant des deux lignes BA et AG, s'ils sont réunis, c'est cinq fois le carré résultant de DE.

[Preuve de cela] :

Nous menons la ligne AE. La ligne AE sera le côté du décagone. Et puisque la ligne BE est deux fois la ligne ED, le carré de BA sera quatre fois le carré de DE. Et le carré résultant de la ligne BE est égal aux deux carrés de AB et de AE. Donc, les deux carrés résultant des deux lignes BA et AE sont quatre fois le carré de ED. Et, pour cela, les carrés résultants des lignes BA, AE et ED sont cinq fois le carré de DE. Et le carré résultant de AG est égal aux deux carrés de DE et EA.



[346] Littéralement : « *la figure qui a douze bases* ».
[347] Littéralement : « *la figure qui a vingt bases* ».

Donc, les deux carrés de BA et AG, <pris> ensemble, sont cinq fois le carré de DE. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

2 = [Proposition 2]

Ceci ayant été démontré, démontrons que le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, qui sont inscrits dans une même sphère, sont circonscrits par un même cercle.

[Exemple] :

Nous considérons le diamètre d'une sphère quelconque, et c'est AB. Et nous traçons dans cette sphère un dodécaèdre et un icosaèdre. Soit GDEZH le pentagone du dodécaèdre et KLT le triangle de l'icosaèdre. Je dis que les deux lignes qui sont menées des centres des deux cercles qui leur sont circonscrits, vers leurs deux circonférences, sont égales.

Sa preuve :

Nous traçons un seul cercle pour le pentagone GDEZH et le triangle KLT. Menons la ligne HD, et nous traçons une ligne droite <telle que> le carré résultant de AB soit cinq fois le carré résultant d'elle, et c'est MN. Le diamètre de la sphère est aussi, en puissance, cinq fois la moitié du diamètre du cercle de l'icosaèdre. Donc la ligne MN est la moitié du diamètre du cercle de l'icosaèdre.

Divisons la ligne MN selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, au point S. Et soit MS sa partie la plus grande.

Puisque le carré de AB est cinq fois le carré de MN - et c'est ainsi que nous l'avons supposé - et que le carré de AB est trois fois le carré de DH, alors trois fois le carré de DH est égal à cinq fois le carré de MN.

Et le rapport de trois fois le carré de DH à trois fois le carré de GH est comme le rapport de cinq fois le carré de MN à cinq fois le carré de MS. Et cinq fois le carré de MN avec cinq fois le carré de MS, c'est comme cinq fois le carré de KL. Donc cinq fois le carré de KL c'est trois fois le carré de GH avec le carré de DH.

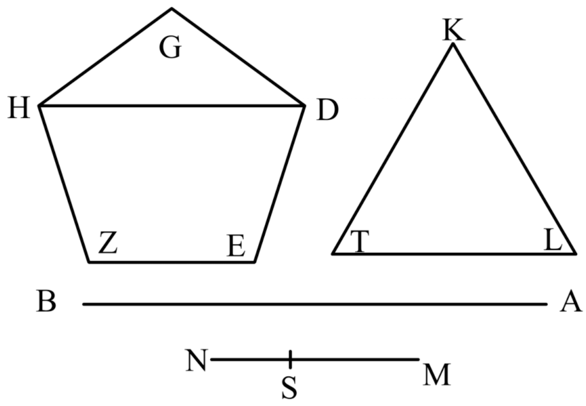
Mais cinq fois le carré de KL est égal à quinze fois le carré résultant de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au triangle KLT. Et trois fois le carré de DH avec trois fois le carré de GH est égal à quinze fois le carré résultant de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au pentagone GDEZH. Et cela parce qu'il a été démontré, dans ce qui a précédé, que le carré de DH avec le carré de GH, c'est cinq fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au pentagone GDEZH.

Donc quinze fois le carré résultant de la moitié du diamètre de l'un des deux cercles est égal à quinze fois le carré résultant de la moitié du diamètre de l'autre cercle. Donc le carré de la moitié de l'un des deux diamètres est égal au carré de la moitié de l'autre diamètre. Le diamètre est donc égal au diamètre[348].

---

[348] Dans le manuscrit : « *Donc le carré de chacun (ou de l'un) des deux diamètres est égal au carré de la moitié de l'autre diamètre. Le diamètre est donc égal aux deux diamètres* »

Donc, le pentagone du dodécaèdre[349] et le triangle de l'icosaèdre[350], qui sont inscrits dans une même sphère, sont circonscrits par un même cercle. Et c'est ce que nous voulions démontrer.



3 = [Lemme 2/3 <a>]

Si <on a> un pentagone à côtés et angles égaux et qu'il est circonscrit par un cercle et que l'on mène de son centre une perpendiculaire vers l'un des côtés du pentagone, <alors> trente fois la surface entourée par l'un des côtés du pentagone et la perpendiculaire est égale à la surface du dodécaèdre.

[Exemple de cela] :

Soit ABGDE le pentagone à cotés et angles égaux. Traçons sur ce pentagone un cercle de centre le point Z et menons du point Z vers le côté GD la perpendiculaire ZH. Je dis que trente fois la surface entourée par les deux lignes GD et ZH est égale à douze fois le pentagone ABGDE.

[Preuve] :

Menons les deux lignes GZ et ZD. Puisque la surface entourée par les deux lignes GD et HZ est deux fois le triangle GDZ, cinq fois la surface entourée par les deux lignes GD et ZH est comme dix fois le triangle GDZ. Et dix fois le triangle GDZ est comme deux fois le pentagone. Et si cela est multiplié par six, <alors> trente fois la surface entourée par les deux lignes GD et ZH sera égale à douze pentagones. Et douze pentagones c'est la surface de la figure entourée par douze bases.

Donc, trente fois la surface entourée par les deux lignes GD et ZH est égale à la surface du dodécaèdre.

Et de cette manière, nous démontrons que, s'il y a un triangle équilatéral, comme le triangle ABG, qu'il est circonscrit par un cercle, que le centre du cercle est le point D et que l'on mène, de lui vers BG, la perpendiculaire DE, alors trente fois la surface entourée par BG et DE est égal à la surface de l'icosaèdre.

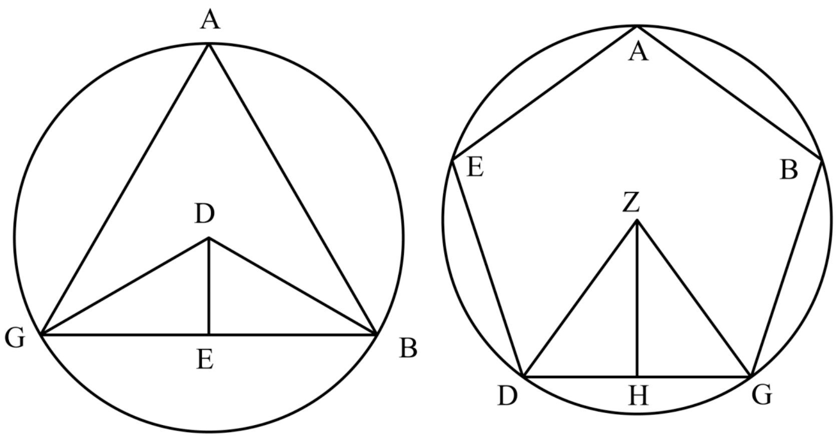
[349] Littéralement : « *la figure qu'entourent douze bases* ».
[350] Littéralement : « *la figure qu'entourent vingt bases* ».

[Preuve] :

Et cela <parce que> la surface entourée par les deux lignes DE et BG est comme deux fois le triangle DBG. Donc deux triangles comme DBG sont égaux à la surface entourée par les deux lignes DE et BG. Nous multiplions cela trois fois. Donc, six fois le triangle DBG sera égal à trois fois la surface entourée par les deux lignes DE et BG. Et six fois le triangle DBG est égal à deux fois le triangle ABG. Et nous multiplions cela dix fois.

Donc, trente fois la surface entourée par les deux lignes DE et BG est égal à vingt triangles comme ABG. Et cela est égal à la surface de l'icosaèdre.

Pour cela, le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de la surface entourée par les deux lignes GD et ZH, de la figure qui contient le pentagone, à la surface entourée par les deux lignes BG et DE de la figure qui contient le triangle.



Et, à partir de cela, il apparaît que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de la surface entourée par le côté du pentagone et la perpendiculaire qui tombe sur lui à partir du centre du cercle, à la surface entourée par le côté de l'icosaèdre et la perpendiculaire qui tombe sur lui à partir du centre du cercle qui entoure son triangle, si le dodécaèdre et l'icosaèdre sont inscrits dans une même sphère. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

4 = [Proposition 3]

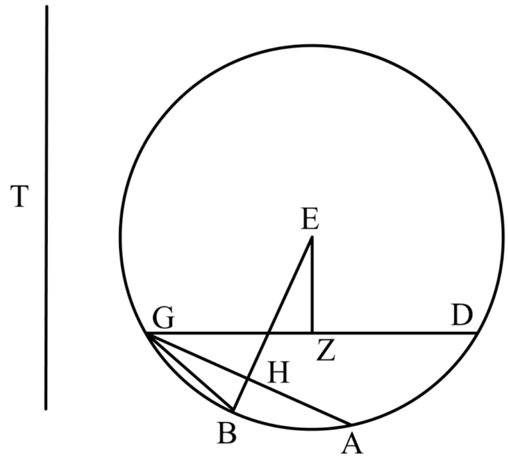
Et si cela est ainsi, nous démontrons que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre.

[Exemple] :

Soit un cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre, qui sont inscrits dans une même sphère, et c'est le cercle ABG. Traçons, dans le cercle ABG, le côté du triangle équilatéral, et c'est GD, et le côté du pentagone, et c'est AG. Que le centre du cercle soit le point E. Nous menons, du point E vers les deux lignes GD et GA, les deux perpendiculaires EZ et EH, et nous menons la ligne droite HB en alignement de la ligne EH jusqu'au point B de la circonférence du cercle ABG. Soit *t* le côté du cube. Je dis que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de *t* à GD.

[Preuve] :

Parce que, si les deux lignes EB, BG sont réunies et que leur ensemble est divisé selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, la partie la plus grande sera BE. Et la moitié des deux lignes BE et BG, c'est EH; et la moitié de BE c'est EZ. Si nous divisons la ligne EH selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, la partie la plus grande sera comme EZ. Donc, le rapport de *t* à AG est comme le rapport de EH à EZ. La surface entourée par les deux lignes *t* et EZ est donc égale à la surface entourée par les deux lignes AG et EH. Et, puisque le rapport de *t* à GD est comme le rapport de la surface entourée par les deux lignes *t* et EZ à la surface entourée par les deux lignes GD et EZ, et que nous avons démontré que la surface entourée par les deux lignes *t* et EZ est égale à la surface entourée par les deux lignes AG et EH, alors le rapport de *t* à GD est comme le rapport de la surface entourée par les deux lignes AG et EH à la surface entourée par les deux lignes GD et EZ. Et cela est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre. Donc, le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de *t* à GD. Et c'est ce que nous voulions démontrer.



5 = [Lemme 3/3*aliter*]

Et il sera démontré, à l'aide d'une autre preuve, que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre. Avant cela, nous présentons cette prémisse :

[Exemple de cela] :

Nous traçons le cercle ABEG et nous y dessinons deux côtés d'un pentagone à côtés égaux, et c'est AB et AG. Nous menons la ligne BG, nous prenons le point D centre du cercle et nous joignons les deux points D et A par la ligne AD. Nous menons la ligne DE en alignement de la ligne AD et nous considérons la ligne DZ comme la moitié de la ligne AD et la ligne HG trois fois la ligne GT. Je dis que la surface entourée par les deux lignes AZ et BT est égale au pentagone qui est dans le cercle ABEG.

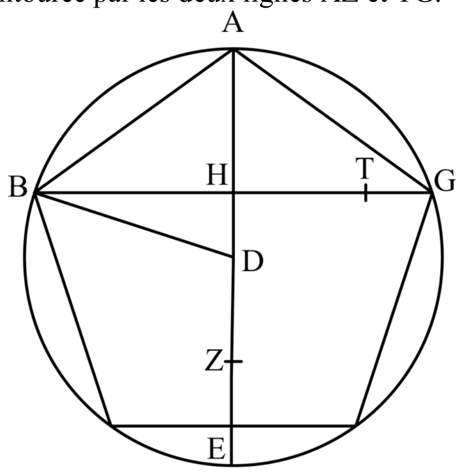
Sa preuve :

Nous joignons les deux points B, D à l'aide de la ligne BD.

Puisque AD est deux fois DZ, la ligne AZ est comme une fois et demie la ligne AD. De même, comme la ligne GH est trois fois la ligne GT, la ligne HT sera comme deux fois la ligne GT. Et, pour cela, la ligne GH sera comme une fois et demie la ligne TH. Donc, le rapport de ZA à AD est comme le rapport de GH à HT. Donc, la surface entourée par les deux lignes ZA et HT est égale à la surface entourée par les deux lignes AD et GH. Et la ligne GH est égale à la ligne BH. Donc, la surface entourée par les deux lignes AD et BH est égale à la surface entourée par ZA et HT. Et la surface entourée par les deux lignes AD et HB est égale au double du triangle ABD. Donc, la surface entourée par les deux lignes ZA et HT est comme deux fois le triangle ABD. Donc cinq fois la surface entourée par les deux lignes AZ et HT est égale à dix fois le triangle ABD. Et dix fois le triangle ABD c'est deux fois le pentagone. Donc cinq fois la surface entourée par les deux lignes AZ et HT c'est deux fois le pentagone.

Et puisque la ligne HT est deux fois la ligne TG, la surface entourée par les deux lignes AZ et HT est comme deux fois la surface entourée par les deux lignes AZ et TG.

Et nous multiplions cela cinq fois. Alors, dix fois la surface entourée par les deux lignes AZ et TG c'est comme cinq fois la surface entourée par les deux lignes AZ et HT. Et cela est égal à deux fois le pentagone. Pour cela, cinq fois la surface entourée par les deux lignes AZ et TG sera comme le pentagone. Et cinq fois la surface entourée par les deux lignes AZ et TG c'est égal à la surface entourée par les deux lignes AZ et BT. Et cela parce que la ligne BT est cinq fois la ligne TG. Et la ligne AZ est une hauteur commune.



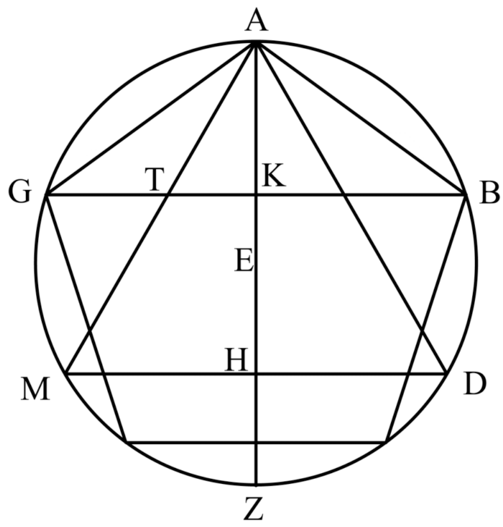
Donc la surface entourée par les deux lignes AZ et BT est égale au pentagone. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

6 = [Proposition 3*aliter*]

Cela étant démontré, nous traçons un cercle qui circonscrit le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre qui sont inscrits dans une même sphère, et c'est le cercle ABG. Et nous traçons, dans ce cercle, deux des côtés du pentagone, et c'est BA et AG, et nous menons la ligne BG. Soit E le centre du cercle. Nous joignons les deux points A et E par la ligne AE et nous la prolongeons jusqu'à Z <sur la circonférence>. Que la ligne AE soit deux fois la ligne EH et que la ligne KG soit trois fois la ligne GT. Que, par le point H, passe une ligne qui coupe AZ, selon des angles droits, et c'est DM. Le triangle ADM est donc équilatéral.

Puisque la surface entourée par les deux lignes AH et TB est égale au pentagone circonscrit par ce cercle et que la surface entourée par les deux lignes AH et HD est égale au triangle AMD, le rapport de la surface entourée par les deux lignes AH et TB à la surface entourée par les deux lignes AH et HD est comme le rapport du pentagone au triangle. Et le rapport de la surface entourée par les deux lignes AH et TB à la surface entourée par les deux lignes AH et HD est comme le rapport de BT à DH. Donc, le rapport de douze fois BT à vingt fois DH est comme le rapport de douze pentagones à vingt triangles. Et c'est le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre.

Et douze fois BT c'est dix fois BG et cela parce que BT est cinq fois TG et BG est comme six fois TG. Donc, six fois BT est égal à cinq fois BG. Et si nous doublons cela, douze fois BT sera égal à dix fois BG. Et vingt fois DH c'est dix fois DM. Et cela parce que la ligne DM est deux fois la ligne DH.



Donc, le rapport de dix fois BG à dix fois DM est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, lequel est comme le rapport de BG à DM, qui est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

7 = [Proposition 4]

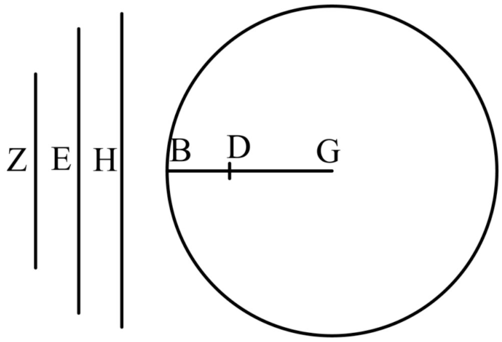
Nous voulons démontrer que si une certaine ligne droite est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance du carré résultant de la ligne tout entière, avec le carré résultant de la partie la plus grande, à la ligne en puissance du carré résultant de la ligne tout entière, avec le carré résultant de la partie la plus petite, est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre.

Soit un cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre, qui sont inscrits dans un même cercle, et c'est (AB). Soit le point G son centre. Nous menons du point G vers la circonférence du cercle la ligne BG, de quelque manière que ce soit, et nous la divisons selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, au point D. Soit GD, sa partie la plus longue. La ligne GD est le côté du décagone inscrit[351] dans ce cercle.

---

[351] Littéralement : "*dessiné*".

Soit la ligne *e* le côté de l'icosaèdre et la ligne *z* le côté du dodécaèdre, la ligne *h* le côté du cube. La ligne *e* est le côté du triangle équilatéral et la ligne *z* est le côté du pentagone inscrit[352] dans ce cercle. Et la ligne *z* est la partie la plus grande de la ligne *h* si elle est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes.



[Preuve] :

Et cela parce que la ligne *e*, <qui> est égale au côté du triangle équilatéral, est en puissance de trois fois le carré résultant de la ligne BG. Donc, le carré résultant de *e* est trois fois le carré résultant de la ligne BG. Et les deux carrés résultant de BG et BD sont trois fois le carré de GD. <Donc, le rapport du carré de *e* au carré de BG est comme le rapport des deux carrés de BG et de BD au carré de GD>[353]. Si nous permutons, le rapport du carré de *e* aux deux carrés de BG <et de BD>[354] est comme le rapport du carré de BG au carré de GD. Et le rapport du carré résultant de BG au carré de GD est comme le rapport de *h* au carré de *z*. Si la ligne <*h*>[355] est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, la plus grande de ses deux parties est égale à la ligne *z*. Donc, le rapport du carré de *e* aux deux carrés BG, GD est comme le rapport du carré de *h* au carré de *z*. Et si nous permutons, le rapport du carré résultant de *h* au carré de *e* est comme le rapport du carré de *z* aux deux carrés BG et BD. Et le carré résultant de *z* est égal aux deux carrés BG et GD. Et cela parce que le côté du pentagone est en puissance du côté de l'hexagone et du côté du décagone. Donc, le rapport du carré de *h* au carré de *e* est comme le rapport des deux carrés BG et GD aux deux carrés BG et DB. Et le rapport des deux carrés BG et GD aux deux carrés GB et BD est comme le rapport des deux carrés résultant de toute la ligne et de la partie la plus grande de toute ligne divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, aux deux carrés de toute la ligne et de sa partie la plus petite. Donc, le rapport de *h* à *e* est comme le rapport de la ligne en puissance des deux carrés de toute la ligne et de sa partie la plus grande à la ligne en puissance des deux carrés de toute la ligne et de sa partie la plus petite. Or la ligne *h* est le côté du cube et la ligne *e* est le côté de l'icosaèdre.

[352] Littéralement : "*tracé*".
[353] <> om. *in ms*.
[354] <> om. *in ms*.
[355] <> om. *in ms*.

Donc, si une ligne droite est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance des deux carrés résultant de toute la ligne et de la partie la plus grande à la ligne en puissance des carrés de toute la ligne et de la partie la plus petite est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre qui sont inscrits dans une même sphère. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

8 = [Proposition 5]

Nous voulons démontrer que le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre.

La preuve :

Et cela est <ainsi> parce que le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre qui sont inscrits dans une même sphère, sont circonscrits par un même cercle. Et les cercles égaux qui sont dans la sphère, leurs distances au centre sont des distances égales. Donc, les perpendiculaires, qui sortent du centre de la sphère vers leurs surfaces, sont égales; et elles tombent sur le centre de ce cercle. Donc, les perpendiculaires qui tombent du centre de la sphère sur les surfaces des cercles circonscrits aux pentagones du dodécaèdre, et qui sont sur les surfaces circonscrites aux triangles de l'icosaèdre, sont égales.

Donc, si ces perpendiculaires sont égales, les pyramides, dont les bases sont les pentagones du dodécaèdre et dont le sommet est le centre de la sphère et les pyramides dont les bases sont les triangles de l'icosaèdre et dont le sommet est le centre de la sphère, <ont> leurs hauteurs égales. Et les pyramides d’égales hauteurs, leur rapport les unes aux autres sont comme le rapport de leurs bases, les unes aux autres. Donc, le rapport du pentagone au triangle est comme le rapport de la pyramide, dont la base est le pentagone du dodécaèdre et dont le sommet est le centre de la sphère, à la pyramide dont la base est le triangle de l'icosaèdre et dont le sommet est le centre de la sphère. Et le rapport des douze pentagones aux vingt triangles est comme le rapport des douze pyramides, dont les bases sont des pentagones, aux vingt pyramides dont les bases sont des triangles. Or les douze pentagones c'est la surface du dodécaèdre et les vingt triangles c'est la surface de l'icosaèdre. Donc le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport des douze pyramides, dont les bases sont des pentagones, aux vingt pyramides dont les bases sont des triangles. Et les douze pyramides dont les bases sont des pentagones c'est le volume du dodécaèdre ; et les vingt pyramides dont les bases sont des triangles c'est le volume de l'icosaèdre. Donc le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre. Or il a été démontré qu'il est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre. Donc, le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

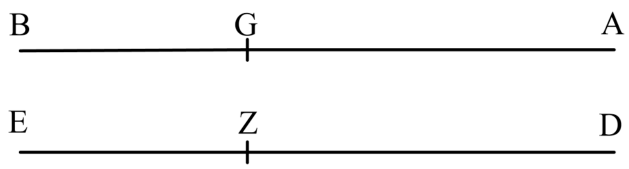
[Lemme SEMR]

Quant au fait que si on a deux lignes droites et qu'elles sont divisées selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, alors les choses qui ont été évoquées précédemment y sont semblables, cela se démontre comme je le décris :

Divisons la ligne droite AB selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes au point G et soit AG sa partie la plus grande. De même, nous divisons la ligne DE selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes au point Z et soit DZ sa partie la plus grande. Je dis que le rapport de tout AB à sa partie la plus grande, qui est AG, est comme le rapport de toute la ligne DE à sa partie la plus grande, qui est DZ.

Sa preuve :

La surface entourée par les deux lignes <AB et BG est égale au carré résultant de la ligne AG. Et la surface entourée par les deux lignes>[356] DE et EZ est égale au carré résultant de DZ. Donc, le rapport de la surface entourée par AB et BG au carré résultant de AG est comme le rapport de la surface entourée par les deux lignes DE et EZ au carré résultant de DZ. Pour cela, le rapport de quatre fois la surface entourée par les deux lignes AB et BG au carré résultant de AG est comme le rapport quatre fois la surface entourée par les deux lignes DE et EZ au carré de DZ. Et si nous composons, le rapport de quatre fois la surface entourée par les deux lignes AB et BG, avec le carré résultant de AG, au carré résultant de AG est comme le rapport de quatre fois la surface entourée par les deux lignes DE et EZ avec le carré résultant de DZ au carré résultant de DZ. Et, pour cela, le rapport du carré résultant des deux lignes AB et BG, réunies, au carré résultant de AG est comme le rapport du carré résultant des deux lignes DE et EZ, réunies, au carré résultant de DZ. Et, pour cela, le rapport des deux lignes AB et BG, réunies, à la ligne AG, est comme le rapport des deux lignes DE et EZ, réunies, à DZ. Et si nous composons, le rapport des deux lignes AB et BG, avec AG, à AG est comme le rapport des deux lignes DE et EZ avec DZ à DZ. Or les deux lignes AB <et BG>[357], avec AG, c'est deux fois la ligne AB; et les deux lignes DE et EZ avec DZ c'est deux fois DE. Si on prend la moitié des antécédents, le rapport de AB à AG est comme le rapport de DE à DZ. Et c'est ce que nous voulions démontrer.



[356] <> om. *in ms.*
[357] <> om. *in ms.*

[Récapitulation n° 1]

Cela ayant été démontré, il apparaît que si on a une ligne droite quelconque et qu'elle est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance du carré de la ligne tout entière, avec le carré de la partie la plus grande de ses deux parties, à la ligne qui est en puissance du carré de cette ligne tout entière avec le carré de sa partie la plus petite, est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre.

<Il a été également démontré que le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre, inscrits dans une même sphère, est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre>[358].

Et il a été également démontré que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre, parce que le cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre est égal au cercle circonscrit au triangle de l'icosaèdre.

Et il est clair que si on inscrit, dans une même sphère, la figure d'un dodécaèdre et la figure d'un icosaèdre, le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre est comme le rapport d'une ligne en puissance du carré d'une certaine ligne divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, avec le carré résultant de sa partie la plus grande, à la ligne en puissance du carré de cette ligne divisée avec le carré de sa partie la plus petite.

[Récapitulation n° 2]

Et cela parce que le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre. Or, le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre.

Et le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre est comme le rapport de la ligne en puissance du carré d'une certaine ligne, quelle qu'elle soit, divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, avec le carré de sa partie la plus grande, au carré de toute cette ligne avec le carré de sa partie la plus petite.

Donc, le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre, qui sont inscrits dans une même sphère, est comme le rapport de la ligne en puissance du carré d'une certaine ligne, quelle qu'elle soit, avec le carré de sa partie la plus grande, si elle divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, au carré de cette ligne tout entière avec le carré de sa partie la plus petite. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

FIN DU LIVRE XIV

[358] <> om. *in ms.*

III COMPARAISON DES TRADITIONS DIRECTE ET INDIRECTES

1. Variantes principales

Rappelons d'abord qu'en ce qui concerne les Livres I à XIII, la confrontation structurelle, entre le texte grec édité par Heiberg et ceux des traductions arabo-latines d'Adélard de Bath et de Gérard de Crémone, permet de mettre en évidence (au moins) trois dichotomies textuelles qui se manifestent principalement dans trois directions :

(i) le matériau textuel contenu qui peut, selon les versions, avoir été ajouté ou supprimé ;

(*ii*) l'ordre d'exposition des unités textuelles, en particulier celui des Propositions, qui peut avoir été perturbé ;

(*iii*) l'altération des preuves, parfois la substitution d'une preuve complètement différente, ou, plus fréquemment, l'existence de deux preuves distinctes successives pour une même Proposition[1].

Ces trois dichotomies textuelles, par ordre décroissant d'importance, sont :

Dichotomie n° **1** (*in* I-XIII) :
Édition Heiberg (≅ ***P***) *versus* traditions médiévales (+ ms grec ***b*** *in* XI 36-XII 17)
Dichotomie n° **2** (*in* I-X) :
Tradition adélardienne *versus* traduction Gérard de Crémone
[reflèterait al-Ḥajjāj \ Isḥāq-Thābit ?]
Dichotomie n° **3** (*in* I-XIII) dans les manuscrits grecs :
P *versus* ***Th***

Une confrontation analogue, étendue cette fois aux manuscrits arabes, permet d'observer également trois dichotomies textuelles pour le Livre XIV. Leur ampleur est moindre — la taille et la complexité du texte en cause suffit à en rendre compte —, mais les divergences sont nettes. Surtout, elles se répartissent autrement. En les énumérant cette fois par ordre *CROISSANT* d'importance, on distinguera :

[1] Pour davantage de détails, voir [Rommevaux, Djebbar, Vitrac, 2001], pp. 235-238 avec le tableau 1, pp. 284-285, ainsi que [Vitrac, à paraître]. Dans le premier de ces articles, nous avons montré que, contrairement à ce qu'avait suggéré [Knorr, 1996], la nature et l'étendue des divergences entre versions dépendaient du ou des Livres dans lesquels on se plaçait, en examinant le cas du Livre X, très différent de la portion XI 36-XII 17 qu'avait privilégiée Knorr. Dans le second, nous montrons, entre autres, qu'elles varient également en fonction du statut "logique" de la portion textuelle à laquelle on s'intéresse : Définition, énoncé, démonstration, porisme …

Dichotomie n° **3** (*in* XIV) dans les manuscrits grecs :
M *versus* ***PBVv***.

Dichotomie n° **2** (*in* XIV) :
Famille Téhéran 3586 + *Ad. I versus GC*

Dichotomie n° **1** (*in* XIV) :
PBVv + Rabat 1101 (+ scholies VI-VII *in GC*) *versus* Famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC*

La dichotomie la plus importante, (XIV), n° **1**, se laisse très grossièrement décrire dans les mêmes termes que celle que l'on observe dans les livres authentiques, (I-XIII), n° **1** : il s'agit de l'opposition entre une (ou des) version(s) globalement "maigre(s)" et une (ou des) version(s) enrichie(s) et améliorée(s). Toutefois, dans les Livres I-XIII, c'est le texte grec qui, le plus souvent, paraît avoir été enrichi (au moins dans la version retenue par Heiberg largement fondée sur ***P***), tandis que les traductions arabes et arabo-latines (auxquelles la version du manuscrit grec ***b*** est apparentée pour XI. 36-XII. 17) sont plus concises.

Comme le lecteur a pu s'en rendre compte en lisant notre partie II, dans le Livre XIV, cette ligne de fracture passe à l'intérieur de la tradition médiévale :

- le texte grec est assez laconique, plus encore dans ***M*** que dans ***PBVv*** [dichotomie (XIV), n° **3**][2] ;
- Sa version ***PBVv*** a un *quasi* équivalent arabe, contenu dans le manuscrit Rabat 1101 et, en partie (pour la fin du Livre), dans les scholies arabo-latines VI-VII de Gérard[3].
- Quant à l'état enrichi et remanié [dichotomie (XIV), n° **1**], il se trouve déjà dans nos deux plus anciens manuscrits conservés de la version dite Isḥāq-Thābit (Téhéran 3586 et Uppsala 321) et dans la version arabo-latine d'Adélard de Bath (réalisée vers 1140).
- Celle du texte principal de Gérard de Crémone suit le plus souvent cette même famille, sans s'interdire des emprunts à l'autre. Elle présente parfois des variantes propres et, surtout, elle a connu un phénomène d'enrichissement poussé à un degré bien plus important encore que la famille du manuscrit Téhéran 3586 et *Ad. I* [d'où la dichotomie (XIV), n° **2**].

Les variantes sont nombreuses et se répartissent dans l'ensemble des unités textuelles du Livre. Cela dit, il convient d'en préciser la nature ainsi que la portée, qui est plutôt limitée.

Toutes les versions médiévales que nous avons consultées contiennent les différents ingrédients strictement mathématiques du texte grec. Toutes, par exemple, possèdent la

[2] Voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 1, pp. 87-88.

[3] Peut-être existe-t-il aussi dans d'autres copies, pour lesquels nous n'avons pas d'informations. Certains manuscrits ont un texte qui présente des caractéristiques partagées avec les deux versions arabes principales, suggérant qu'on puisse les décrire comme "mixtes" et témoignant du fait que la version Rabat 1101 n'est pas totalement isolée. C'est le cas du ms arabe Escorial 907 (XIII^e^ s.), de la version arabo-latine appelée compendium et même, dans une certaine mesure, de celle de Gérard de Crémone (voir *infra,* §§ 3-4).

preuve alternative à XIV **3** et son lemme[4]. Si l'on se cantonne, comme il se doit, à la tradition indirecte primaire, l'ordre d'exposition de ces ingrédients est toujours le même. Certes, la petite taille du Livre XIV et sa structure déductive, passablement linéaire, offraient une faible latitude pour opérer des changements d'ordre : on peut seulement permuter les Propositions XIV **3** et **4**, qui découlent toutes deux de XIV **2**. Cette possibilité a d'ailleurs été exploitée dans certaines recensions, notamment celle d'al-Maghribī ainsi que dans un texte hébraïque apparenté[5], mais celles-ci n'appartiennent plus à la transmission primaire. Enfin les preuves sont *globalement* identiques, au sens qu'elles mettent en jeu les mêmes arguments mathématiques dans toutes les versions. Il faut se rappeler que ce n'est pas le cas dans les Livres I à XIII, ni quand on confronte traditions directe et indirecte, ni même à l'intérieur de la seule tradition grecque.

Un rappel s'impose : nous avons expliqué ailleurs[6] ce que nous entendions par preuve *alternative* : un changement significatif dans le noyau argumentatif, par opposition aux écarts stylistiques, importants du point de vue textuel, mais sans portée mathématique. Dans le Livre XIV, ces écarts stylistiques sont assez nombreux, notamment lorsque le texte grec semble avoir souffert (début de la portion "preuve" dans XIV **2**, fin des preuves de XIV **3** et **4**) ou lorsqu'il y a eu un problème de transmission dans la tradition médiévale (par exemple dans la fin de la preuve du Lemme XIV **3/3***aliter*)[7]. Mais ils ne changent pas l'argumentation au point qu'il faudrait parler de preuve "alternative".

En fait, les divergences *structurelles* caractéristiques des trois dichotomies que nous avons mentionnées se manifestent essentiellement de trois manières :

1) Des portions de caractère para- ou métamathématique du texte grec sont soit *absentes* (ou *ont été éliminées*), soit altérées dans certaines versions médiévales.
2) À l'inverse, celles-ci présentent un certain nombre d'ajouts mathématiques, plutôt triviaux, qui n'existent apparemment pas en grec.
3) De très nombreuses variantes ponctuelles, sans réelle incidence mathématique, témoignent de l'important enrichissement d'une branche de la tradition médiévale.

Donnons quelques exemples :

(1a) La préface au Livre XIV se trouve dans les manuscrits de la version dite Isḥāq-Thābit (pour les Livres I-XIII) que nous avons consultés. Dans le manuscrit Rabat 1101, le texte est assez proche de celui des manuscrits grecs ***PBVv***. Celui de cinq autres manuscrits (Téhéran 3586, Petersbourg 2145; Thurston 11; Kobenhavn 81; Escorial 907) paraît quelque peu résumé et présente quelques variantes significatives[8].

[4] Fausse exception : le *De Practica Geometrie* de Fibonacci les élimine de son "fascicule de résultats" stéréométriques euclidiens (chapitre 6, 159-162 Boncompagni) précisément parce qu'il s'agit d'un fascicule de résultats. On sait qu'il reprend ses énoncés du Livre XIV au ms BnF lat. 7373 (compendium), dans lequel XIV **3/3***alit* et XIV **3***alit* existent (= *Comp.* XIV 8).

[5] Voir *infra,* III, § 5.

[6] Dans [Vitrac, 2004], en particulier pp. 7-8.

[7] Voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A et *infra,* ANNEXE, Tableau 4, comm. *ad loc.*

[8] Voir *supra* II, B ou ANNEXE, Tableau 4, qui permet facilement de comparer les deux textes par le biais de leurs traductions françaises.

La préface existe dans la traduction arabo-latine attribuée à Gérard de Crémone (*GC,* p. 413), mais a été éliminée de la tradition dite adélardienne (*Ad. I, RC, JT,* Anonyme de Bonn), y compris la recension de Campanus. Elle n'existe pas non plus dans celle d'Ibn Sīnā. Malgré quelques lacunes propres (« ô Protarque », la troisième occurrence d'Apollonius), la préface de la traduction de *GC* s'apparente au texte du manuscrit Rabat 1101. Celle du compendium est très différente[9].

(1b) À l'autre extrémité du traité se trouve la récapitulation finale, double dans le grec (d'où Récapitulations I, II dans notre texte et dans le petit tableau ci-dessous), donc redondante en ce sens que plusieurs des résultats importants du Livre sont mentionnés deux fois et que II(*i*) ressemble à s'y méprendre à une dittographie (corrompue) de I(*v*) :

	Récapitulation I		Récapitulation II
(i)	$\partial_1 : \partial_2 :: a_6 : a_{20}$ (XIV **4**)	*(i)*	On a $V_{12} : V_{20} :: \partial_1 : \partial_2$
(ii)	Or $a_6 : a_{20} :: S_{12} : S_{20}$ (XIV **3**)	*(ii)*	car $V_{12} : V_{20} :: S_{12} : S_{20} :: a_6 : a_{20}$
(iii)	et $S_{12} : S_{20} :: V_{12} : V_{20}$ (Résultat d'Apollonius)	*(iii)*	[Résultat d'Apollonius + XIV **3** ≈ XIV **5** !] et $a_6 : a_{20} :: \partial_1 : \partial_2$ (XIV **4**)
(iv)	*EPP* (car résultat d'Aristée, XIV **2**)		/
(v)	Donc $V_{12} : V_{20} :: \partial_1 : \partial_2$	*(iv)*	Donc $V_{12} : V_{20} :: \partial_1 : \partial_2$

Adélard et le texte principal de Gérard, cinq des six manuscrits de la version Isḥāq-Thābit consultés ne connaissent que la première récapitulation. Le compendium possède quelque chose qui est proche des assertions (*ii*)-(*iv*) de la seconde. Point capital, dans le seul manuscrit Rabat 1101 et dans la scholie VII arabo-latine de la version de Gérard de Crémone, on trouve la première (comme dans les autres manuscrits arabes), mais aussi les assertions (*ii*)-(*iv*) de la seconde.

Cette double récapitulation finale est certainement inauthentique — rappelons que, comme le Lemme SEMR, elle ne fait pas partie des sections numérotées dans le manuscrit ***P***[10]. À l'instar des doubles preuves, il y a probablement eu compilation de variantes dans les manuscrits byzantins. Son existence dans la version du manuscrit de Rabat 1101 n'est guère compatible avec l'idée que cette dernière procèderait d'un modèle très ancien. Le fait qu'aucune version arabe ou arabo-latine ne possède l'assertion II(*i*), ainsi que ses particularités terminologiques[11], renforce encore la suspicion vis-à-vis de son authenticité.

(1c) La cheville de transition intercalée entre l'ajout à la Proposition XIV **1** et le Lemme XIV **1/2** n'est "complète" que dans le grec, dans le manuscrit Rabat 1101 et chez Gérard de Crémone. Les manuscrits de la famille Téhéran 3586, le ms Escorial 907,

[9] Voir *infra,* III ,§ 4.
[10] Voir [Vitrac-Djebbar, 2011], I, § 3, p. 55, note 41 et p. 57, note 45.
[11] Voir [Vitrac-Djebbar, 2011], A, II, § 3, p. 120, note 336.

les versions d'Adélard, de Campanus et le compendium n'ont pas l'assertion initiale et l'explication postposée donnée dans (*iii*) n'est pas la même :

	Grec, Rabat 1101, *GC*	Autres mss Isḥāq-Thābit, *Ad. I,* Compendium
(*i*)	Rappel du résultat d'Aristée	—
(*ii*)	Indications historiques sur Aristée et Apollonius	
(*iii*)	*EPP* (car $p_{12} = p_{20}$)	*EPP* (car $r_{12} = r_{20}$) *ie* rappel du résultat d'Aristée
(*iv*)	Annonce-transition vers XIV **1/2** + **2**	

Chaque version est cohérente car il serait totalement inutile d'introduire le rappel du résultat d'Aristée dans (*iii*) s'il figurait déjà dans l'assertion (*i*) comme c'est le cas, par exemple, en grec. Cela dit, le lecteur observera facilement que les deux variantes principales de l'*EPP,* correspondent (avec de petites variantes) respectivement à l'hypothèse et à la conclusion du premier argument de XIV **5**[12] et, sans doute, s'agit-il de deux tentatives (anciennes et indépendantes) de complétion du texte.

En ce qui concerne les ajouts mathématiques très élémentaires propres à une branche de la tradition indirecte, celle de la famille Téhéran 3586, ainsi que la version d'Adélard, nous en relèverons quatre exemples[13] :

(2a) l'existence d'un ajout à l'ajout à XIV **1** :

> « Donc la perpendiculaire sortant du centre vers le côté du pentagone est égale à la perpendiculaire sortant du centre vers le côté du triangle et à la moitié du côté du décagone, <pris> ensemble »,

combinant ledit ajout dans une reformulation de XIV **1**. Il existe aussi dans le compendium, dans la version du ms Escorial 907 (repris à la version de la famille Téhéran 3586), mais pas dans celle du ms Rabat 1101.

(2b) Un ajout (reformulation stéréométrique du résultat) au Lemme XIV **1/2**, en remarquant que AB est le côté du cube, AC celui du dodécaèdre et DE la moitié du diamètre du cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre. Même remarque que précédemment pour le compendium, les mss Escorial 907 et Rabat 1101.

(2c) La transformation de la deuxième partie du Lemme XIV **2/3** (<b>+<c>) en une Proposition avec une ecthèse et un diorisme. L'existence d'un diagramme y est sans doute pour quelque chose. La même remarque que précédemment, pour le compendium, les mss Escorial 907 et Rabat 1101, s'applique ici, à ceci près que la Proposition ainsi constituée dans le compendium n'a ni ecthèse ni diorisme.

---

[12] Resp. *EHM,* V, 28.20-22 et 30.4-7 Heiberg (= *EHS,* V, 1, 17.14-16 et 17.20–18.1). Cf. aussi la glose marginale dans le ms Téhéran 3586 (f°231^{v}), *supra,* II, B, § 2, note 54 et § 4, note 336.

[13] Voir aussi ANNEXE, Tableau 3.

(2d) Enfin et surtout, l'existence d'une Proposition apparemment supplémentaire, celle que nous avons appelée XIII 9^{bis}, à laquelle nous consacrerons notre prochain paragraphe.

Quant à l'autre aspect dudit enrichissement — ces variantes locales tellement nombreuses —, le lecteur se rapportera aux quelques 200 exemples que nous énumérons dans les notes infrapaginales du Tableau 4 de l'ANNEXE. Il constatera aisément qu'il s'agit d'altérations ponctuelles : précisions et/ou identifications supplémentaires au niveau des énoncés, des ecthèses et des constructions ; renvois livresques (surtout au Livre XIII) et citations (non instanciées) de Propositions pour justifier certaines inférences et soulager la mémoire du lecteur ; modifications de présentation de certains arguments …, altérations dont la teneur et parfois même le style s'apparentent à ce que nous avons trouvé dans les scholies grecques portées par les manuscrits ***MV*** pour le Livre XIV[14].

Une grossière analyse statistique faite à partir du Tableau 5 de l'ANNEXE confirme, s'il en était besoin, la faiblesse de certains clivages, la force de certaines parentés qui, au demeurant, ressortent immédiatement à la lecture des textes : le clivage entre les traditions grecques d'un côté et arabes ou arabo-latines de l'autre, considérées dans leur ensemble, se produit seulement dans 5 cas sur 201 ; celui entre ***M*** et la famille ***PBVv,*** 24 fois (12 %). Le compendium se trouve en accord avec le grec, contre tout le reste de la tradition arabe et arabo-latine, dans seulement 6 cas, d'ailleurs fort peu significatifs, ce qui est un argument — supplémentaire — pour soutenir la thèse qu'il s'agit bel et bien d'une version arabo-latine.

À l'inverse, il y a accord entre la version grecque des manuscrits ***PBVv*** et celle, arabe, du Rabat 1101 dans 186 cas (93 %), entre celle de la famille du Téhéran 3586 et les traductions arabo-latines *Ad. I* et *GC* dans 177 cas (88 %) et même 193 (96 % !) en se limitant au seul Adélard.

2. La Proposition additionnelle XIII 9^{bis} (= XV 1 arabe)

À de nombreuses reprises déjà, nous avons évoqué cette Proposition à caractère lemmatique utilisée, conjointement avec le Lemme SEMR, dans deux des principaux résultats du Livre XIV (**2**, **4**)[15] et dont la place d'insertion varie dans la tradition indirecte médiévale[16] : elle suit immédiatement la préface dans le compendium, elle apparaît avant le résultat d'Aristée (XIV **2** dans notre découpage = *GC,* XIV 4), sa première utilisation, dans la version de Gérard, mais elle se trouve tout à fait à la fin du Livre XIV chez

[14] Cf. [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 4 et *infra,* ANNEXE, Tableau 4, notes 26, 28, 29, 39, 51, 66, 72, 73, 77, 101, 110-113, 120-121, 132, 152.

[15] Voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 3, comm. *ad loc,* respectivement p. 109, note 279 et p. 116, note 313. Remarquons que si le recours à XIII 9^{bis} est assez implicite dans XIV **2** (surtout dans la version du ms ***M,*** voir *ibid.,* II, A, § 2, p. 93, note 70), dans XIV **4** il est parfaitement explicite.

[16] Voir le Tableau 3 de l'ANNEXE.

Adélard, au-delà même de la récapitulation "finale". Il n'y a guère de doute que telle était la place où elle se trouvait dans la traduction arabe, car XIII 9^{bis} n'est rien d'autre que la *première* Proposition du Livre XV dans les six manuscrits de la version Isḥāq-Thābit consultés et dans la recension de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī.

C'est précisément la raison pour laquelle le Livre XV arabe possède 6 Propositions : XIII 9^{bis} et les cinq premières du texte grec. Au début de son Livre XV, Ṭūsī observe d'ailleurs :

> « Je crois que cette Proposition était au début du Livre précédent et qu'elle se trouve ici par erreur : certains résultats dudit Livre sont basés sur elle et il n'y en a pas besoin ici … »[17].

Il a raison sur un point : il y a erreur, mais il s'agit plutôt d'un problème de découpage entre Livres XIV et XV. Mathématiquement, le lemme XIII 9^{bis} *devrait* se trouver au début de XIV et y a d'ailleurs été placé chez d'Ibn Sīnā et Gérard, ainsi que dans le compendium, et il se peut que Ṭūsī ait consulté une version structurée de cette façon. Mais sa place effective d'insertion a certainement été la toute fin du Livre XIV, après la récapitulation finale[18]. Autrement dit, comme le Lemme SEMR, il s'agit d'un ajout inauthentique et plutôt tardif.

A priori, il n'existe ni dans le texte grec des livres additionnels, ni dans le Livre XIII des *Éléments* où il aurait pu s'insérer, compte tenu de son lien avec XIII 9 qui lui vaut sa désignation :

> « Si le côté de l'hexagone est coupé en extrême et moyenne raison, son plus grand segment est le côté du décagone inscrit dans le même cercle » (XIII 9^{bis}).
>
> « Si le côté de l'hexagone et celui du décagone — inscrits dans le même cercle — sont composés, la droite entière est coupée en extrême et moyenne raison et son plus grand segment est le côté de l'hexagone » (XIII 9).

Il n'est cependant pas inconnu de la tradition grecque, puisqu'il existe dans une scholie du manuscrit ***M*** et dans le Livre V de la *Collectio* de Pappus, en tant que Lemme 11 (= Proposition 47, 434.8-19 Hultsch). XIII 9^{bis} manque complètement dans la famille des manuscrits grecs ***PBVv*** mais, si l'on croit que la séquence textuelle commune aux manuscrits de la famille Téhéran 3586 et à la version d'Adélard I : « Lemme SEMR – récapitulation – Lemme XIII 9^{bis} », reflète quelque chose qui a existé en grec, si l'on observe que le texte arabe du Livre XV (dont la première Proposition est précisément XIII 9^{bis}) ne coïncide pas avec le texte grec des Propositions XV 1-5, il est facile

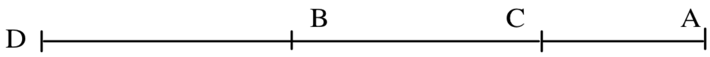
---

[17] Traduction française A. Djebbar.

[18] Un autre témoin de la tradition indirecte présente cette place d'insertion : le ms BnF, Hebr. 1011. Nous devons cette information à T. Lévy et l'en remercions. T. Lévy a déjà fortement souligné la proximité entre ce manuscrit hébraïque — malheureusement il transmet seulement les énoncés et les diagrammes — et la version dite *Ad. I* ([Lévy, 1997], p. 93).

d'imaginer un scénario rendant compte de la non-existence de ce Lemme dans les livres additionnels de la famille ***PBVv*** : il a été inséré dans un ancêtre de la tradition, à la fin du Livre XIV, après les récapitulations (comme chez Adélard) ; une erreur de découpage entre XIV et XV le fit considérer comme Proposition XV 1 (comme dans la famille Téhéran 3586) ; le texte grec du Livre XV qui nous est parvenu provient d'une autre recension, indépendante de cet ajout. Dans le manuscrit ***M*** ou dans son modèle, le Lemme avait été déplacé comme annotation, insérée lors de sa première utilisation dans XIV **2**.

Même s'il est ténu, un indice en faveur de ce scénario réside dans le fait que la preuve de la Proposition XV 1 arabe, celle de la scholie grecque 25 (ainsi que celle de Pappus) utilisent les mêmes ingrédients mathématiques (XIII 9 et le Lemme SEMR)[19] :



En résumé, on adjoint à la droite AB (c_6), coupée en extrême et moyenne raison en C, une droite DB, égale côté du décagone. Grâce à XIII 9, on a donc SEMR [AD] en B, et donc :

AD : AB :: AB : BD.

On a aussi SEMR [AB] en C par hypothèse et, par le Lemme SEMR : AD : AB :: AB : BC, donc AB : BD :: AB : BC (V. 11) donc BD = BC (V. 9) et BC = c_{10}, CQFD.

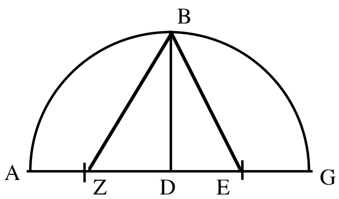
Or, il y a bien d'autres façons d'établir ce petit résultat. Ainsi la recension de Campanus en proposera trois distinctes ! La première (*Camp.* 495.106-120) correspond substantiellement à celle que nous venons de résumer. La deuxième (*Camp.* 495.121-125) combine la Proposition euclidienne XIII 5[20] et une sorte de converse de XIII 9, qu'il ne faut évidemment pas confondre[21] avec XIII 9bis :

---

[19] Le tableau 6 de l'ANNEXE donne les traductions françaises de ces trois versions.

[20] « Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison et qu'une [droite] égale au plus grand segment lui est ajoutée, la droite entière aura été coupée en extrême et moyenne raison et le plus grand segment est la droite initiale » (en termes modernes, la SEMR est stable par composition du rapport).

[21] C'est pourtant ce qu'a fait Ptolémée lui-même, dans l'établissement de sa table des cordes au chapitre 10 du premier Livre de l'*Almageste* !



Soit ABG un demi-cercle de centre D et BD perpendiculaire au diamètre AG. DG est bissecté en E et EZ est prise égale à EB. BZ est jointe. Ptolémée dit alors que ZD est le côté du décagone et que BZ est le côté du pentagone. On a :

$$GZ.ZD + ED^2 = EZ^2 \text{ (\textit{Él.} II 6).}$$

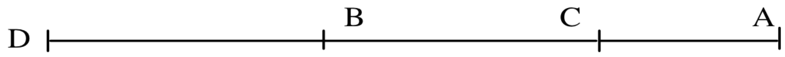
$$EZ^2 = EB^2 = ED^2 + DB^2. \text{ D'où : } DB^2 = GZ.ZD = DG^2.$$

Et donc la droite GZ est coupée en extrême et moyenne raison en D et son grand segment est DG.

À ce point, le texte grec transmis de Ptolémée comporte une séquence (33.12-15 Heiberg : « ἐπεὶ οὖν ἡ τοῦ ἑξαγώνου καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου πλευρὰ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνονται ») que l'on pourrait identifier comme une citation non instanciée de XIII 9 quoique la citation ne soit pas littérale. Et en effet l'auteur de *l'Almageste* développe son raisonnement comme s'il s'agissait de cela en remarquant qu'ici GD est le côté de l'hexagone, et donc que DZ est le côté du décagone. Puis, par XIII 10 — avec cette fois une véritable *CNI* (33.18-20 Heiberg) —, il obtient que BZ est le côté du pentagone.

> « Si, au côté de l'hexagone équilatéral et équiangle, on ajuste une droite plus petite, de sorte que la composée des deux droites soit coupée en extrême et moyenne raison au point où elles s'ajustent, la droite ajustée sera le côté du décagone inscrit dans le même cercle que celui qui circonscrit l'hexagone » (XIII 9^{conv})

On suppose alors la droite AB, côté d'un hexagone inscrit dans un cercle, coupée en extrême en C. On lui adjoint BD, cette fois égale à BC, le plus grand segment.



D'après XIII 5, on a donc SEMR [AD] en B et, puisque AB = c_6, par XIII 9^{conv}, on a BD = c_{10} ; or DB = BC, donc BC = c_{10}, CQFD[22].

La troisième preuve de Campanus (495.126–496.141) n'est autre que la preuve de XV 1 arabe qui, comme nous l'avons dit, utilise les mêmes ingrédients mathématiques que la première, tout en compliquant (inutilement) les choses. Nous allons y revenir.

Mais ce n'est pas tout. On pouvait aussi procéder à partir d'une Proposition XIII 5^{bis}, sorte de "dual" de XIII 5 (en termes modernes, la SEMR est stable par séparation du rapport) :

> « Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison et qu'une [droite] égale au plus petit segment est retranchée au plus grand, le plus grand segment aura été coupé en extrême et moyenne raison et son plus grand segment est le plus petit segment de la droite initiale »[23].

En le combinant avec XIII 9, on obtient immédiatement XIII 9^{bis}. C'est ainsi que procède la scholie *GC* N°IX[24] (et ce, bien que Gérard, contrairement à Campanus, n'établisse pas XIII 5^{bis}). Nous-mêmes en avons donné encore une autre justification, fondée sur *Él.* IV 10, dans notre note complémentaire à XIV **1**[25]. Bref, il ne manquait pas de manière

Remarquons que la confusion n'a pas seulement affecté Ptolémée, mais aussi son éditeur, Heiberg, qui ajoute comme référence entre crochets, précisément « XIII 9 ». Heureusement les commentateurs veillaient et Théon observe que Ptolémée a utilisé la *converse* de XIII 9 et donne deux preuves (indirectes), l'une linéaire, l'autre surfacique, de ce que DZ est bien le côté du décagone (465.13–466.5 Rome). Dans son annotation à XIII 9, Campanus remarque lui aussi que Ptolémée, au chapitre 9 (*sic*) du premier Livre de l'*Almageste,* a assumé la converse de XIII 9. Puis il établit que si la somme AB de deux segments AG, GB est coupée en extrême et moyenne raison en G avec AG > GB, alors si AG est le côté de l'hexagone, GB est le côté du décagone et si GB est le côté du décagone, AG est le côté de l'hexagone (*Camp.,* 469.305–470.344).

22 C'est aussi la preuve de la recension d'al-Maghribī (XIII 9^{bis} = al-M. XIII 14). Voir [Hogendijk, 1993], 231 qui, dans son commentaire, ne distingue pas XIII 9 et XIII 9^{conv} !

23 Ce résultat n'existe pas dans le Livre XIII, mais il se trouve dans les ajouts de la recension de Campanus (464.134-144).

24 Scholie à XIII 9, 443.37-53 Busard.

25 Dans [Euclide-Vitrac, 2001], nous en avons fourni encore une autre dérivation à partir de la configuration stéréométrique de XIII 16 (construction de l'icosaèdre) ; voir en particulier p. 450 : les triangles rectangles XVO, YOX sont semblables ; or YO : OX :: d_5 : c_5 ; OV : VX :: c_6 : c_{10} ; donc, en combinant le Lemme

d'établir notre Lemme et le fait que les démonstrations de la Proposition XV 1 arabe et de la scholie grecque 25 se ramènent toutes deux à une simple combinaison de XIII 9 et du Lemme SEMR est peut-être significatif.

L'indice, avons-nous dit, est toutefois ténu, car le texte de la version arabe est manifestement le résultat d'un travail éditorial quelque peu démesuré compte tenu de l'enjeu, travail qui masque les parentés ou filiations éventuelles. D'abord l'utilisation de XIII 9 y fait l'objet d'un renvoi livresque explicite avec citation non instanciée : c'est l'étape (5) qui n'existe pas dans les deux versions grecques[26]. Surtout, l'étape (9) introduit une droite auxiliaire EW — égale à AB et elle aussi divisée en extrême et moyenne raison —, dont on ne perçoit pas très bien l'utilité. Il ne s'agit pas de se dispenser du Lemme SEMR, car comment justifier autrement l'étape 11, ce que confirment d'ailleurs les deux preuves mises en parallèle. On peut même affirmer que l'étape (10), déjà, utilise un cas très particulier du Lemme SEMR : si on a SEMR (AB) en G, SEMR (EW) en Z avec AB = EW, alors s_1 (AB) = s_1 (EW)[27]. La spécificité de la preuve de la Proposition XV 1 arabe par rapport aux deux autres démonstrations, c'est d'appliquer ledit Lemme, non pas à deux sections envisagées à partir de segments d'une *même* droite AD, mais sur deux droites *distinctes*. Pour contrebalancer ces écarts qui résultent sans doute d'une réécriture tardive[28], on observera que l'énoncé, l'ecthèse et le diorisme (donc le lettrage) de la Proposition XV 1 arabe et de ceux du Lemme contenu dans la scholie grecque 25 sont plus proches, entre eux, que des portions correspondantes chez Pappus.

3. Particularités de certaines versions arabes et arabo-latines

Adélard de Bath

Il y a fort peu à dire au sujet de la version d'Adélard, sinon souligner à nouveau sa très forte proximité, à la fois globale et locale, avec celle de la famille Téhéran 3586. Le seul véritable écart structurel que l'on peut observer entre ces deux versions dans le Livre XIV réside dans l'élimination de la préface[29]. C'est d'autant plus significatif que l'on a

---

SEMR et XIII 8, on obtient une fois encore XIII 9^{bis}. En considérant toutes les micro-variantes, en prenant en compte les autres versions arabo-latines et hébraïques, on obtient une quinzaine de preuves "distinctes" ; voir [Herz-Fischler, 1988]. On peut cependant, comme nous l'avons fait, les regrouper pour l'essentiel en cinq familles.

[26] Voir *infra* ANNEXE , Tableau 6. Cette étape n'existe pas non plus dans le compendium.

[27] Ce qui peut s'établir, indépendamment du Lemme SEMR, en appliquant la Proposition XIII 1 aux droites AB et EW. On en déduit immédiatement que si deux droites égales sont coupées en extrême et moyenne raison, leurs grands et petits segments respectifs sont égaux. Mais rien n'indique que l'auteur de notre preuve s'en soit aperçu. En revanche, le "Porisme" adjoint par Pappus à son Lemme 8 (voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 3, p. 119, note 331), montre que, pour sa part, il y voyait une conséquence du Lemme SEMR

[28] Peut-être après altération du texte. C'est ce que suggèrent les variantes enregistrées dans les marges du ms Uppsala 321. Voir *infra,* ANNEXE, Tableau 6, notes 216, 219-220.

[29] Le décalage d'un numéro que le lecteur peut percevoir dans le Tableau 3 de notre ANNEXE tient à la malencontreuse initiative de Busard consistant à faire de la troisième partie du Lemme XIV **2/3** une proposition numérotée XIV 6.

ici affaire à une recension ponctuellement enrichie, alors que la version d'Adélard est si laconique dans les Livres I à XIII que l'on pourrait parfois douter de son intégrité (par exemple dans le Livre X) ou même imaginer qu'il s'agisse de la traduction d'un épitomé. Adélard lui-même ne semble pas être en cause, car lorsque cette version présente un *IPI,* il existe aussi dans la famille du ms Téhéran 3586 et donc très probablement dans le modèle arabe utilisé par le traducteur latin. Sa seule singularité est de compiler successivement deux versions de la Proposition XIII 9bis, très proches l'une de l'autre et de la Proposition XV 1 arabe[30]. Son mérite, parmi les traductions arabo-latines, est de l'avoir maintenue à ce qui, comme nous l'avons dit, a probablement été son lieu initial d'insertion.

Scholies in Gérard de Crémone

Il y a tout aussi peu à dire de la version (partielle) transmise par les scholies VI-VII à la version de Gérard de Crémone. Cette fois, la forte proximité s'exerce avec l'autre branche principale de la tradition indirecte, celle du manuscrit Rabat 1101. Les seules divergences, microscopiques, que nous ayons enregistrées consistent en :

(*i*) l'existence des chevilles d'articulation du genre « exemple de cela », « sa preuve », que les scholies possèdent tant dans XIV **4** que dans le Lemme SEMR[31].

(*ii*) une lacune de deux mots dans Rabat 1101 pour la démonstration de XIV **4**[32].

(*iii*) une lacune d'une phrase dans Rabat 1101 pour la preuve du lemme SEMR[33].

(*iv*) Peut-être une erreur d'interprétation d'un mot ("ἡγουμένων" ou plutôt son équivalent arabe) dans la scholie VII, à la fin du lemme SEMR[34].

Cette version a trois mérites au moins :

- elle possède un texte correct de la fin de la preuve de XIV **4**, contrairement au grec[35] ;
- ses citations de cette même Proposition, dans les doubles récapitulations, restent fidèles à l'usage euclidien de la "δυναμένη", contrairement à la famille Téhéran 3586 dans les premières récapitulations, contrairement au grec lui-même, dans les secondes[36] ;
- elle témoigne du fait que le texte du ms Rabat 1101 n'est pas resté totalement isolé.

Le trait commun aux versions que nous allons discuter maintenant, outre certaines singularités propres à chacune d'elles, est de reprendre et de mixer des éléments textuels aux deux branches principales que nous avons distinguées au sein de la tradition indirecte médiévale.

---

30 Voir *infra,* ANNEXE, Tableau 6, en particulier note 213.

31 Rabat possède le second type seulement dans le Lemme SEMR, aucun des deux dans XIV **4**. Voir ANNEXE, Tableau 4, notes 148, 181.

32 Voir ANNEXE, Tableau 4, note 158.

33 Voir ANNEXE, Tableau 4, note 187.

34 Voir ANNEXE, Tableau 4, note 194.

35 Voir [Vitrac-Djebbar, 2011], pp. 149-151, note complémentaire 5.3.

36 Voir ANNEXE, Tableau 4, notes 200, 208.

Gérard de Crémone

Comme nous l'avons indiqué à la fin du § 1, il n'y a aucun doute qu'Adélard et Gérard appartiennent à une même tradition textuelle qui est aussi celle de la famille Téhéran 3586. La confirmation s'en trouve aussi dans l'examen des diagrammes et des lettrages, lesquels sont similaires (voir *infra,* ANNEXE, 7), sauf dans le très simple schéma du Lemme SEMR. Mais, contrairement à Adélard, le responsable de la version de Gérard ou de son modèle arabe, ne s'est pas interdit d'aller puiser dans l'autre branche principale de la tradition arabe quand celle-ci lui paraissait préférable ou plus riche.

Nous l'avons déjà dit pour la préface et la transition métamathématique insérée après la Proposition 1. La même démarche l'a conduit à insérer des preuves pseudo-*aliter* à XIV **1** et à *GC* XIV 6 (= XIV **2/3** <b>), dont la première est reprise à l'autre famille textuelle[37]. Dans son texte principal figurent les versions les plus complètes, conformément à la règle qu'il suit habituellement dans les Livres I à XIII[38]. Néanmoins une différence de taille doit être notée : il n'est pas dit ici que ces démonstrations alternatives ont été trouvées « *in alio libro* ». La Proposition *GC* XIV 5 (= XIV **2/3** <a>) est exemplaire de son caractère syncrétique : dans la portion « énoncé – ecthèse – diorisme », il suit le texte de la famille Téhéran 3586, y compris dans ses "errements"[39], mais sa partie "preuve" est identique à celle des mss Rabat 1101 et Escorial 907.

La version de Gérard est aussi considérablement enrichie, non seulement par rapport au texte grec et au ms Rabat 1101, mais aussi relativement aux autres membres de la même famille. Pour se limiter aux catégories caractéristiques et facilement identifiables des références livresques (la plupart du temps au Livre XIII)[40], des citations non instanciées[41] et des explications postposées, on en trouve 15 partagées par Adélard et Gérard (qui manquent dans le grec, dans Rabat 1101 et dans le compendium) et presque autant, 12, que possède le seul Gérard. La plus étonnante se trouve dans XIV. **4** (= *GC* XIV 10)[42] : il s'agit d'une citation non instanciée du Lemme SEMR, mentionné comme quelque chose ayant été démontré avant — alors qu'il est inséré après (= GC XIV 12) —, avec une formulation qui n'est pas celle de Gérard, mais plutôt celle de la première partie de la version al-Maghribī[43] !

---

[37] Voir ANNEXE, Tableau 4, notes 33 et 100 respectivement.
[38] Voir [Rommevaux, Djebbar, Vitrac, 2001], p. 274.
[39] Voir ANNEXE, Tableau 4, notes 83-86.
[40] Pour mémoire, rappelons que les références livresques explicites dans le texte grec de la totalité des Livres I à XIII sont au nombre de 3 ou 4 (voir [Euclide-Vitrac, 2001], p. 58, n. 74). Aucune n'existe dans les traductions arabo-latines.
[41] Rappelons également que pour les 180 *CNI* « normales » (*i.e.* qui n'appartiennent pas à un *IPI* complexe) dans les portions de texte communes aux traditions directe et indirecte des Livres I à XIII, *GC* n'en possèdent qu'un peu plus de la moitié (93), Adélard, moins du tiers (57).
[42] Voir *GC,* 426.22-30.
[43] « Si deux droites sont coupées en extrême et moyenne raison, le rapport de la première à la seconde est le même que le rapport du plus grand segment de la première au plus grand segment de la seconde et le même

Mais il y a pire. Dans le Livre XIV, certaines spécificités apparentent *GC* à une recension :

• D'une part le déplacement du Lemme XIII 9^{bis} en troisième position chez Gérard, avant sa première utilisation dans *GC* XIV 4 (= XIV **2**).

• D'autre part, la modification des preuves de ce même Lemme, *GC* XIV 3, et de *GC* XIV 4 pour se dispenser de recourir au lemme SEMR[44].

La tentative est assez vaine, car les preuves de XIV **3-4** (=*GC* XIV 7, 10) n'ont pas été modifiées en ce sens, or elles requièrent, elles aussi, ledit Lemme. Son maintien en fin de Livre constitue le manquement le plus évident de *GC.* Mais ces deux modifications, l'ajout de preuves pseudo-alternatives à XIV **1** et à *GC* XIV 6, le déplacement du Lemme XIII 9^{bis}, prouvent qu'il y a eu un travail spécifique, visant à la complétion du texte et à l'amélioration de la structure déductive, du moins en ce qui concerne la première partie du Livre XIV (jusqu'au Lemme XIV **2/3**). À l'autre extrémité, un souci du même genre est sans doute à l'origine de l'insertion des scholies VI-VII qui enregistrent l'autre preuve de XIV **4** (celle du grec, du ms Rabat 1101 et du compendium), l'autre version des récapitulations finales.

Escorial 907

La version contenue dans ce manuscrit arabe dit andalou mérite moins le qualificatif de "recension" que celle de Gérard : elle ne s'autorise aucun déplacement de Proposition, aucune altération substantielle de démonstration qui ne figurait pas déjà dans les deux branches principales de la tradition, aucune adjonction de doubles preuves. Mais elle combine allègrement les leçons desdites familles, soit par simple juxtaposition, soit en créant, par combinaison, des assertions "originales".

Exemple de la première démarche, à la suite de la Proposition **1**, la version de l'Escorial 907 enchaîne avec l'ajout à l'ajout, repris à la famille Téhéran 3586, de même que la transition métamathématique pourtant moins complète dans cette branche[45]. Puis elle revient au texte de Rabat 1101 pour le Lemme XIV **1/2** dans sa totalité auquel elle adjoint, là encore, l'ajout repris à la famille Téhéran 3586[46]. Pour le début de la Proposition XIV **2** (énoncé-ecthèse-diorisme), elle est à nouveau très proche de Rabat, le lettrage est quasi identique — à la minuscule exception d'une permutation sur le lettrage du triangle —, et le texte de l'Escorial 907 permet de confirmer la corruption de Rabat 1101 dans la séquence (4)-(6)[47]. Mais la séquence "preuve" [(7)-(27)] est très proche de celle de la famille Téhéran 3586, enrichie grâce à ses références livresques, quoique dans

---

que le rapport du plus petit segment de la première au plus petit segment de la seconde » (voir [Hogendijk, 1993], p. 230).

[44] Voir ANNEXE, Tableau 4, note 71 et Tableau 6, note 215 respectivement.

[45] Voir ANNEXE, Tableau 4, notes 36, 38, 39, 41.

[46] Voir ANNEXE, Tableau 4, notes 42, 44-47, 51-52, 55.

[47] Voir ANNEXE, Tableau 4, note 60.

le lettrage de Rabat 1101. Le retour au texte de ce dernier se fait dans la conclusion particulière (29)[48]. Un phénomène analogue se retrouve en fin de Livre, d'abord dans XIV 4 où, après un énoncé proche de Rabat 1101 quoique quelque peu enrichi, la preuve est celle de la famille Téhéran 3586, avec ecthèse de cinq segments de droites au lieu de trois, pour revenir à une conclusion (33)-(34) du type Rabat 1101, puis, dans le Lemme SEMR, où l'énoncé très divergent de la famille Téhéran 3586 (mais sans instanciation) est suivi de la preuve du ms Rabat 1101[49]. Le diagramme de ce Lemme est tout-à-fait spécifique, mais sans que cela se trouve marqué dans le texte[50].

La création d'assertions "originales" par combinaison se retrouve surtout dans la portion XIV **2/3** – XIV **3***aliter*, ainsi que dans les diagrammes correspondants[51]. Il y a (au moins) deux raisons à cela :

- la famille Téhéran 3586 a introduit des énoncés généraux non instanciés et multiplicatifs qui n'existent ni en grec, ni dans le Rabat 1101, pour la partie <b> du Lemme XIV **2/3**, pour le Lemme XIV **3/3***aliter* et pour XIV **3***aliter ;* la version de l'Escorial 907 fait donc de même, mais en restant fidèle aux formulations géométriques du grec et de Rabat 1101[52].
- Le texte de la fin de XIV **3** a sans doute été corrompue dans un archétype de la tradition indirecte et Escorial 907 propose une fin de preuve qui est sans doute une correction pour restituer un texte acceptable[53]. La même explication pourrait valoir pour la fin de la preuve du Lemme XIV **3/3***aliter*[54].

Ces soucis de complétion et de correction sont comparables à ce que nous avons dit à propos de la version de Gérard de Crémone qui partage d'ailleurs certains enrichissements spécifiques avec celle de l'Escorial 907[55]. Mais il est très clair que cette dernière ne saurait être le modèle de Gérard et il faut admettre qu'il a existé bien d'autres versions enrichies et corrigées, y compris dans la seule aire géographique maghrébo-andalouse.

4. Le compendium arabo-latin

Une preuve en est l'existence d'une version que nous avons déjà évoquée à maintes reprises, que son éditeur décrit comme « abbreviated »[56] et son "inventeur" comme « a curious paraphrase and pastiche of its <Book XIV> and Book XV's contents ». Il la qualifie ensuite d'"épitomé"[57] ; il s'agit du compendium contenu dans le ms BnF latin

---

[48] Voir ANNEXE, Tableau 4, notes 62, 67, 69, 72, 74, 77-79, 81.
[49] Voir ANNEXE, Tableau 4, comm *ad loc.*
[50] Voir ANNEXE, Tableau 4, note 184.
[51] Voir ANNEXE, 7.
[52] Voir ANNEXE, Tableau 4, notes 93, 126, 136. Cf. aussi les notes 101, 104.
[53] Voir ANNEXE, Tableau 4, note 120.
[54] Voir ANNEXE, Tableau 4, note 133.
[55] Voir ANNEXE, Tableau 4, notes 96, 117, 163, 172-173.
[56] *Gr. lat.*, p. 17.
[57] [Murdoch, 1966], p. 249 et p. 283 respectivement.

7373. Il a été copié par deux mains, distinctes de celles des portions gréco-latines[58] et c'est la main dite « de base » qui a copié le Livre XV (gréco-latin) qui suit, dupliquant du même coup le Livre XV. Bien entendu la version arabo-latine ne contient que ce qui correspond à la première partie du Livre XV grec, lequel est traduit complètement dans la version gréco-latine qui suit[59]. La réalisation du manuscrit relève donc d'une seule et même opération scripturale confiée à plusieurs collaborateurs[60]. Nous lui consacrons un paragraphe à part entière car l'accès que nous avons eu à la tradition indirecte arabe et arabo-latine permet d'en dire un peu plus et d'infléchir ou de réfuter certaines affirmations de nos prédécesseurs qui, pionniers en ce genre d'étude, n'avaient pas accès à toutes les informations nécessaires.

Outre le caractère abrégé qu'ils lui reconnaissent, Murdoch et Busard s'accordent sur un autre point : il n'y a pas lieu, de rattacher cette version des Livres XIV-XV à la traduction de la portion authentiquement euclidienne qui le précède ou à celle du Livre XV, elle aussi gréco-latine, qui suit dans le manuscrit. Le compendium ne procède pas *de verbo ad verbum* et, sur ce point, ils ont très certainement raison.

Busard, dans son édition, ne cherche guère à préciser quel est le statut de ce texte : abrégé d'une version préexistante arabo-latine, gréco-latine, ou encore traduction d'un épitomé arabe … desdits Livres. Murdoch était un peu plus catégorique : il s'agissait selon lui d'un texte basé sur un original *grec,* mais dont le compilateur connaissait aussi (au moins) une traduction arabo-latine. Un peu plus loin[61], il précisait que cette traduction arabo-latine appartenait à la tradition adélardienne. L'article déjà cité de Herz-Fischler, consacré à la Proposition XIII 9bis, présente la version du compendium de ce résultat dans une section 5 intitulée « Greek (?)-Latin tradition ». Il n'exclut pas l'utilisation d'un modèle grec par le compilateur, mais la tonalité de sa description montre qu'il est plutôt sceptique à ce sujet. Il se sent d'ailleurs obligé de mentionner l'avis d'un des referre anonymes de son article, lequel est convaincu que le compendium est une version arabo-latine[62]. Quels sont les arguments en présence ?

En ce qui concerne le caractère abrégé du compendium, soyons clairs : il n'y en a pas ! Ou plutôt Murdoch en avance un seul, très faible : le texte ne possède que les

[58] Voir *Gr. lat.*, p. 22. Busard ne précise pas comment elles se sont réparti le travail.
[59] L'édition Busard ne suit pas l'ordre du manuscrit, mais insère la version gréco-latine du Livre XV (pp. 391-398) directement à la suite de celle des Livres I à XIII.
[60] Quelle est la raison d'un tel "montage" ? Nous l'ignorons. Il se peut que le modèle grec utilisé contenait seulement les Livres I-XIII + XV. Sachant que d'autres branches de la tradition intercalaient un autre Livre entre XIII et "XV", les responsables de cette réalisation l'auraient récupéré dans une autre version ; il se peut aussi que ledit modèle était très difficile à lire ou mutilé dans la portion correspondant au Livre XIV. Tout aussi vraisemblable est l'idée d'une composition progressive de cette version : d'abord (*i*) à partir d'un manuscrit grec de la famille théonine qui ne contenait que les Livre I-XIII, que l'on a complété (*ii*) avec une version arabo-latine des Livres XIV-XV. Plus tard, la prise en compte d'une autre copie grecque, contenant cette fois les Livres XIV-XV, permit de se rendre compte que, si la différence est limitée entre traditions grecque et médiévale en ce qui concerne le Livre XIV, ce n'est pas le cas pour le Livre XV que l'on crut devoir reprendre une seconde fois (*iii*) pour disposer d'une version "complète".
[61] Voir [Murdoch, 1966], p. 282 et p. 284 respectivement.
[62] Voir [Herz-Fischler, 1988], p. 42, n. 69.

Propositions XV **1**-**5** et a « éliminé les compléments du texte grec »[63]. Mais la tradition arabe et arabo-latine de ce même Livre ne connaît précisément que les Propositions XV **1**-**5**. On ne peut parler d'"élimination" qu'en postulant, ou en démontrant, que le modèle suivi était grec et comportait un Livre XV "complet" tel que nous le connaissons, ou tel que le transmet la version gréco-latine qui suit le compendium aux f°173^r-175^v du même manuscrit. À l'inverse, on pourrait précisément utiliser le contenu dudit Livre XV dans le compendium pour soutenir la thèse qu'il s'agit d'une version arabo-latine, ce que nous allons établir de manière incontestable à partir d'autres arguments.

Auparavant, remarquons que le caractère prétendument abrégé ne concerne pas le Livre XIV. D'ailleurs, lorsqu'il veut donner un exemple des remaniements que le Livre XIV a subi dans le compendium, Murdoch cite *in extenso*[64] la Proposition XIV **1** et la transition entre XIV **1** et XIV **1/2** et l'on voit que, s'il manque en effet la première des quatre assertions de ladite transition en grec[65], on trouve en revanche l'ajout à l'ajout à XIV **1**, ce qui, nous le savons désormais, constitue l'une des caractéristiques de l'ensemble de la tradition indirecte, à l'exception de la version du manuscrit de Rabat. C'est en particulier le cas du manuscrit arabo-andalou Escorial 907[66].

Pour ce qui touche au caractère grec du modèle du compendium, Murdoch avance trois arguments :

1. La présence de fréquents hellénismes.
2. Le lettrage des diagrammes qui suit l'ordre de l'alphabet grec.
3. La critique des traducteurs arabes que contient la dernière section de la préface dudit compendium (voir le texte de la préface, *infra*). Selon Murdoch, le compilateur tient à se distinguer de cette tradition ce qui soutient l'idée qu'il utilise un modèle grec.

Reprenons-les, en ordre inverse :

3. L'inférence revient à attribuer à notre auteur les intentions des traducteurs de la Renaissance, par exemple Zamberti, quand ils prennent position vis-à-vis de la tradition médiévale d'origine arabe. La dernière section de la préface relève un simple manquement à l'ordre déductif concernant la place de XIII 9^{bis}, en tête du Livre XV dans les versions arabes, alors qu'il s'agit d'un Lemme pour le Livre XIV. À ce compte, on devrait en inférer que Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, qui fait exactement le même genre de remarque[67], éreinte les traducteurs arabes et procède d'un retour au grec ! Cette critique des *arabici translatores* confirme plutôt que notre auteur appartient à cette tradition.

---

[63] [Murdoch, 1966], p. 283.
[64] [Murdoch, 1966], p. 300, n. 107.
[65] Dans XIV 1 le compendium ne possède ni l'identification de droites (5), ni la proportion triviale (12), ni l'explication post-posée (15). Voir ANNEXE, Tableau 4, notes 23, 25, 26. C'est aussi le cas dans le ms Escorial 907 et la nature même de ces "manques" interdit d'en faire les marques d'une épitomisation.
[66] Voir ANNEXE, Tableau 4, note 36.
[67] Voir *supra,* § 2, note 17.

2. La remarque sur le lettrage des diagrammes est presque exacte[68], mais manque son but : l'existence d'une version arabe — celle du manuscrit Rabat 1101 —, non identifiée à l'époque des travaux de Murdoch et ayant le même lettrage que le texte grec, annule pour ainsi dire l'argument 2.

1. Reste la question des hellénismes.

Force est de constater que Murdoch ne donne *aucun* exemple illustrant cette assertion, alors qu'il en avait donné beaucoup pour la portion gréco-latine I-XIII[69]. On pourrait croire que la désignation de la section en extrême et moyenne raison dans le compendium constitue un hellénisme significatif. Dans les Livres VI et XIII de la version gréco-latine, l'expression grecque : « ἄκρον καὶ μέσον λόγον ... τετμῆσθαι » est traduite « extrema et media proportione » + différentes formes du verbe "seco", alors que les traducteurs arabes et arabo-latins parlent de :

« diviser selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes » (*****).

Or, dans le Livre XIV du compendium, on utilise « proportione medii et extremorum » + différentes formes du verbe "divido", davantage proche du grec que de (*****). Mais Herz-Fischler[70] a montré qu'un savant qui connaît la tradition grecque peut modifier une source arabe sur ce point : Fibonacci cite XIII 9bis dans sa révision du problème 17 du traité d'Abū Kāmil *Sur le pentagone et le décagone* en employant « media et extrema proportione », là où l'original portait probablement la forme (*****). On remarquera en outre que la version gréco-latine suit l'ordre des mots du grec — Murdoch a souligné que le phénomène était fréquent dans cette version[71] —, mais pas le compendium (ni Fibonacci), et aussi qu'Adélard et Gérard utilisent ce même verbe "divido".

A contrario, il existe un certain nombre de mots grecs qui sont *toujours* translittérés en latin dans la version gréco-latine des 13 premiers Livres et du Livre XV[72] et dont six se trouvent dans les Livres XIV + XV **1-5**. Il s'agit de "κάθετος" (XIV + XV **2**, **5**), "περιφερεία" (XIV), "παραλληλόγραμμον" (XV **4**), "ὀκτάεδρον" (XV **2-4**), "δωδεκάεδρον" (XIV + XV **5**), "εἰκοσάεδρον" (XIV + XV **5**), respectivement translittérés "cathetus", "periferia", "parallilogrammum", "octaedron", "dodecaedron", "icosaedron". On en trouve respectivement 13 + 3, 5 + 0, 0 + 1, 0 + 6, 43 + 1 et 56 + 2 occurrences dans les Livres XIV-XV grecs : ils ne sont *jamais* transcrits dans le compendium, mais traduits respectivement par "perpendicularis", "circumferentia" ou "arcus" selon le sens, "superficierum", "solido viii basium triangularum equilaterum",

---

[68] Il y a une exception à l'assertion de Murdoch sur les diagrammes : XIV **1/2** ; voir *infra,* ANNEXE 7.

[69] Le seul que nous avons détecté, guère probant, est l'usage de la translittération "tetragonus" au lieu de la traduction "quadratum" dans Comp. XIV **1**, **3**, **4**, **9**, **10 ;** XV **3**, **4**.

[70] Voir [Herz-Fischler, 1988], p. 36, note 61.

[71] Voir [Murdoch, 1966], p. 252.

[72] Voir le tableau dressé dans *Gr. lat.*, p. 14, comprenant 29 termes ! Un second tableau (p. 15), contient 28 termes, tantôt translittérés, tantôt traduits comme "τρίγωνον" (trigonum, triangulus), "τετράγωνος" (tetragonus, quadratum), "παράλληλος" (parallilos, equidistans), "ὀρθογώνιος" (orthogonius, rectiangulus) …

"solido xii basium pentagonarum equilaterum" et "solido xx basium triangularum equilaterum" (comme dans les versions arabo-latines)[73]. L'auteur de la version gréco-latine forge également des composés latins originaux qui calquent le grec, par exemple "coutrumque" pour rendre "συναμφότερος, ον" qui apparaît dans le Livre XIV (10 fois dans ***M,*** 11 fois dans ***PBVv***). Dans le compendium, on ne trouve pas le néo-composé "coutrumque", mais "simul" à 6 reprises, "totius" en une occurrence.

En fait, nous avons cru utile de faire ce relevé, notamment sur le Livre XIV, uniquement à cause de l'assertion de Murdoch sur l'usage d'hellénismes. En effet, si l'on admet la solidarité des Livres XIV et XV du compendium — ce que nous faisons pour notre part —, aucun doute n'est possible : les preuves de la tradition arabo-latine des Propositions XV **1-5** sont différentes de celles du texte grec et celles du compendium sont apparentées aux premières !

La situation n'est pas la même dans le Livre XIV. Le compendium est en effet parfois bien plus proche du texte grec que ne le sont les autres versions arabo-latines, notamment dans les importantes Propositions XIV **3**, **4**, dans les Lemmes XIV **2/3** <a>, XIV **3/3***aliter,* dans XIV **3***aliter,* XIV **5**, la preuve du lemme SEMR et dans les récapitulations finales N°2. Mais, contrairement à Murdoch, nous n'avons plus besoin de postuler une dépendance directe à l'égard d'un modèle grec, puisqu'un texte arabe, structurellement très proche de la version des manuscrits ***PBVv,*** est transmise par le manuscrit Rabat 1101. Certes il y a aussi des points de contact avec l'autre branche principale de la tradition indirecte médiévale, notamment en début de Livre : ajout à l'ajout de XIV **1**, absence de l'assertion (1) et formulation de l'*EPP* dans l'assertion (3) de la transition XIV **1 → 2**, l'ajout à XIV **1/2,** énoncé non instancié pour le Lemme XIV **2/3** <b>, énoncé très général du lemme SEMR, pour ne rappeler que les principaux. Mais on les trouve aussi dans la version du manuscrit Escorial 907.

Contrairement à Murdoch, nous ne croyons pas qu'il faille faire l'hypothèse que le compendium suive et contamine plusieurs modèles. Comme nous l'évoquions à la fin du paragraphe précédent à propos de la version de Gérard de Crémone, il nous paraît plus vraisemblable de postuler l'existence d'une version arabo-andalouse en quelque sorte intermédiaire entre celles des manuscrits Rabat 1101 et Escorial 907, très fidèle au premier à partir de la Proposition XIV **3**, davantage remanié comme le second en début de Livre.

Pour conclure sur la nature de ce texte, signalons que Busard, à la suite de la remarque faite par Herz-Fischler au sujet de l'expression de la division en extrême et moyenne raison que nous avons rapportée plus haut[74], suggère que le compendium a pu être

[73] On peut ajouter que dans la version gréco-latine de XV 1-2, "πυραμίς" est simplement translittéré, mais traduit « solido iv basium triangularum equilaterum » dans le Livre XV du compendium, que la première utilise systématiquement "trigonum", le compendium "triangulus" …
[74] Voir *supra,* note 72.

composé par Léonard de Pise, dit Fibonacci[75]. Pour soutenir cette conjecture, il rappelle la proximité entre l'auteur du *Liber Abaci* et la cour de l'empereur Frédéric II à laquelle il rattache la réalisation de la version gréco-latine. Il montre aussi que Léonard connaissait ladite version, notamment les Livres VI et X, et, comme nous l'avons déjà dit, quand celui-ci reproduit les énoncés du Livre XIV dans le "fascicule de résultats" stéréométriques euclidiens de sa *Practica Geometrie,* il les emprunte au compendium. Busard ajoute que Fibonacci et ledit compendium utilisent les expressions « (latus) pentagonicum, exagonicum, decagonicum » là où le Livre XIII de la version gréco-latine emploient les usuels « (latus) pentagoni, exagoni, decagoni »[76]. Que Léonard eût accès au compendium et l'ait cité, nous croyons que cela n'est pas douteux. Qu'il en soit l'auteur, comme le suggère Busard, nous paraît plus incertain. Cette attribution lui a paru plausible sans doute à cause de la nature qu'il attribuait, à la suite de Murdoch, à notre texte : un épitomé. En effet, Léonard n'est pas connu pour être un traducteur.

Mais notre étude a montré que ledit compendium est beaucoup plus proche de la tradition indirecte *primaire* que les autres versions arabo-latines (notamment celle de Gérard de Crémone). Dès lors, faut-il continuer à dire que le compendium est une version abrégée ? Ne faut-il pas plutôt le considérer comme une version particulièrement "pure" ? Il possède tous les éléments mathématiques du Livre XIV. Contrairement aux épitomés de type « Ibn Sīnā », il possède des énoncés généraux. À l'inverse de ce que l'on voit dans le Livre X d'Adélard, ses démonstrations, pour laconiques qu'elles soient, ne sont pas lacunaires. Il n'a pas les premières récapitulations finales, mais celles-ci sont inauthentiques …

À l'issue de cette comparaison, nous aurions un peu de mal à comprendre que l'on puisse considérer cette version comme un abrégé et continuer à dire que la version d'Adélard des Livres I à XIII est une traduction ! En fait, ce qui induit l'idée que nous sommes en présence d'une recension, et non d'une simple traduction, est la préface[77].

La traduction de travail qui est proposée ici de ce texte difficile[78] permettra au lecteur de se faire une idée :

---

[75] Voir *Gr. lat.*, p. 20.

[76] Voir *Gr. lat.*, p. 20, n. 65. Observons par exemple que dans sa proposition XIV 9 (= XIV **4**), le compendium inclut une *CNI* de XIII 10 sous la forme : « latus pentagonicum possit supra latus exagonicum latusque decagonicum », alors que le texte de la gréco-latine est : « pentagoni latus potest illud quod latera exagoni et decagoni » [et celui de la *Practica Geometrie,* 161 Boncompagni : « (In circulo descripto penthagono equilatero) latus penthagonicum potest super latus exigonicum, ac latus decanonicum (*sic*) »]; cf. *Gr. lat.*, p. 375.29-30 et p. 405.33-34.

[77] Texte latin repris à *Gr. lat.*, p. 399.2-14.

[78] Nous avons consulté S. Rommevaux et F. Acerbi sur la manière dont ils comprenaient ce texte et nous les remercions pour toutes les indications qu'ils nous ont fournies. Certaines portions sont difficiles à comprendre et semblent décourager toute tentative de traduction, ce à quoi, d'ailleurs, ni Murdoch, ni Busard, ni Herz-Fischler ne se sont risqués.

[a]	Acefalus in commento super Euclidem de Archimede Siro scribit :	Acefalus, dans son commentaire à Euclide, au sujet d'Archimède le Syrien écrit :
[b]	Dum esset Alexandrie in studio, forte ad manus eius pervenisse duos Apollonii libros de habitudine figurarum ad invicem in eadem spera constructarum (ms : constructarunt), quos cum summo affectu pertractaret.	« alors qu'il était en voyage d'étude à Alexandrie, il avait eu par hasard entre les mains deux livres d'Apollonius au sujet de la relation mutuelle des figures construites dans une même sphère, qu'il avait étudiés avec une très grande passion.
[c]	In secundo tandem, qui videlicet diligentius examinatus erat, visus est sibi totum Euclidis deprehendisse propositum in relatione rerum ad invicem mutueque habitudinis consideratione.	Dans le deuxième, enfin, qui avait évidemment été examiné avec plus d'attention, il avait jugé qu'[Apollonius] avait repris[79] tout ce qui avait été proposé par Euclide au sujet du rapport mutuel des choses et de la considération de la relation réciproque ».
[d]	Restat itaque nobis, quoniam precendentia manifesta sunt, eam deinceps habitudinem speculari que inter solida (ms : solidum) duo in eadem spera constructa semper (ms : super) est, quorum alterum, scilicet xx basium triangularum, alterum xii basium pentagonarum,	Il nous reste donc, puisque ce qui précède est clair, à porter notre attention maintenant sur cette relation qui se trouve toujours entre deux solides construits dans une même sphère, dont l'un est précisément celui à 20 bases triangulaires, l'autre celui à 12 bases pentagonales,
[e]	ad quam gradatim quodam modo pervenire oportet, post missis videlicet quorum ordo viam quo intendimus patet (ms : paret).	[relation] à laquelle il convient de parvenir d'une certaine manière de façon graduelle, après qu'aient été évidemment placées [des propositions] dont l'ordre rend visible la voie que nous proposons.
[f]	Ac primum quidem id quod arabici translatores (ms : transfiatores) ex Acefalo sumptum in ipsa Euclidis (ms : Eucledis) in principio XV libri interserunt, nos neque ad ipsum pretermittimus ne quid necessarium desit, sed, ut demonstrationis ordo postulat, visum est potius ab eo XIIII libri primordium sumendum.	Et en premier lieu, précisément, ce que les traducteurs arabes ont inséré dans les <livres> d'Euclide au début du livre XV en le reprenant à Acefalus, nous ne l'omettrons pas, afin que rien de nécessaire ne manque ; mais, comme l'ordre de la démonstration le demande, il nous a paru qu'il devait être pris plutôt au commencement du livre XIV.

Par contraste avec le texte grec, il semble qu'il faille distinguer l'auteur de la préface et un certain Acefalus cité par lui, qu'avec Murdoch, Busard et Herz-Fischler nous

[79] ou « il (Apollonius) avait jugé [bon] de reprendre tout … ».

pourrions identifier à Hypsiclès. Nous pourrions aussi imaginer une confusion avec la mention de l'existence de versions tronquées (ἀκέφαλος), sans préface, comme dans la tradition adélardienne ou chez Ibn Sīnā. Même si Acefalus est une déformation de la traduction latine d'une des formes arabes d'Hypsiclès (Cf. Assicolaus dans *GC*), les assertions que la préface lui prête sont sensiblement différentes de celles que l'on trouve dans les textes grec et arabe.

Reste que l'auteur semble connaître une certaine version du *proemium* d'Hypsiclès : il mentionne Alexandrie, Apollonius, le rapport entre figures solides inscrites dans une même sphère. Si les deux dernières indications se trouvent aussi dans la charnière de transition insérée après Compendium XIV 2 (= XIV **1**)[80], ce n'est pas le cas de la mention d'Alexandrie. On doit cependant relever d'étonnantes confusions, comme celle de Basilide le Tyrien et d'« Archimede Siro », l'adjonction d'informations alternatives telle la mention d'Euclide — non cité dans la préface du Livre XIV, mais également mentionné dans les versions du manuscrit arabe Escorial 907 et des manuscrits hébraïques BnF, Hebr. 1011 et 1381[81] —, enfin l'absence de dédicace à Protarque.

Comment faut-il expliquer la mention de « deux » Livres d'Apollonius ([b]) et, plus particulièrement du deuxième ([c] : « in secundo ») ? L'auteur résume t-il drastiquement la préface grecque ou bien a-t-il confronté ladite préface avec la « Transition 1 → 2 » qui parle en effet d'une « deuxième édition » (δευτέρᾳ ἐκδόσει) de l'ouvrage d'Apollonius ? Se peut-il qu'il y ait confusion entre la 2ᵉ édition du Livre d'Apollonius et le 2ᵉ Livre ajouté à Euclide — *i.e.* le Livre XV, dans la première partie duquel il est question de l'inscription mutuelle des polyèdres — et qu'il y soit fait allusion ici. Cette seconde hypothèse nous paraît plus vraisemblable car elle est consonante avec ce que nous avons vu de l'histoire des livres additionnels dans la tradition arabe[82].

Quoi qu'il en soit, l'assertion [d] de la préface introduit le thème du Livre XIV (comparaison de l'icosaèdre et du dodécaèdre inscrits dans une même sphère) et celle-ci

---

[80] 400.15-22 Busard.

Nun igitur quoniam instantis demonstrationis est quod Aristeus scribit in libro de habitudine quinque figurarum atque Apollonius in traditione secunda de propositione solidi xx basium triangularum ad solidum xii basium pentagonarum cum eam dicam proportionem solidi xx basium triangularum ad solidum xii basium pentagonarum, que videlicet superficiei illius ad superficiem huius, idque ideo nimirum,	Donc, maintenant, puisque pour la présente démonstration on a ce que Aristeus a écrit dans son livre sur la relation entre les cinq figures et ce qu'a écrit Apollonius dans sa deuxième édition au sujet du rapport entre le solide à 20 bases triangulaires et le solide à 12 bases pentagonales, avec elle je dis que le rapport du solide à 20 bases triangulaires au solide à 12 bases pentagonales est évidemment celui de la surface de l'un à la surface de l'autre,
quoniam circulus continens triangulum solidi xx basium equalis fit circulo continenti pentagonum solidi xii basium.	et cela assurément par conséquent, parce que le cercle contenant le triangle du solide à 20 bases est égal au cercle contenant le pentagone du solide à 12 bases.
Consequenter eis que posita sunt, subiungi necesse est que demonstrationis ordo postulat.	Par conséquent à partir de celles qui ont été posées, il est nécessaire que soit ajoutée celle que l'ordre de la démonstration demande.

[81] Dans le premier, il a pris la place d'Apollonius. Dans le second, comme dans Escorial 907, il remplace Apollonius dans les deux premières occurrences seulement. Voir *infra,* Tableau 4 de l'ANNEXE, note 3.

[82] Voir [Vitrac-Djebbar, 2011], pp. 81-83.

s'achève sur une critique des traducteurs arabes qui porte sur l'ordre de l'exposé [f]. Pour l'auteur du compendium, il s'agit évidemment de justifier le déplacement de la Proposition supplémentaire XIII 9^{bis} (= Compendium XIV 1) à la suite immédiate de la préface. Si on rapproche cette caractéristique du fait que cet ajout est aussi la première Proposition du Livre XIV dans la recension d'Ibn Sīnā ou de la remarque du même ordre par Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (déjà citée), on est naturellement conduit à penser que le compendium relève de la tradition indirecte secondaire des recensions et que son auteur n'a pas hésité à intervenir sur le texte des deux livres qui suivent.

Mais leur lecture ne confirme guère ce jugement. Le déplacement de XIII 9^{bis} est la *seule* modification structurale que notre auteur se soit autorisé. Pour le reste, son texte est bien davantage épargné par toutes les variantes éditoriales, parfois intéressantes, parfois triviales, que nous avons identifiées dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC*.

5. La postérité des Livres additionnels

Modérons notre enthousiasme : malgré tout le travail éditorial dont nous avons fait état au sein de la tradition indirecte médiévale, le foisonnement des variantes que nous avons enregistrées, aucune des traductions arabes ou arabo-latines n'est parvenue à éliminer les problèmes déductifs qu'elles avaient hérité du texte grec du Livre XIV. Le compendium a bien placé XIII 9^{bis} là où il faut, mais il ne l'a pas fait pas pour le lemme SEMR [utilisé dans XIV **2**-**3**-**4** et même dans XIII 9^{bis} (= compendium XIV 1)], maintenu en fin de Livre. Même si cela vaut dans une moindre mesure (son lemme SEMR est seulement utilisé dans XIV **3**-**4**), le même reproche s'applique à Gérard de Crémone. Quant à la famille Téhéran 3586 et Adélard, ils possèdent ces deux ingrédients (XIII 9^{bis}, lemme SEMR) consécutivement, à charnière des Livres XIV-XV, quoique séparés par ce que nous avons appelé les récapitulations finales N°1 !

Au XIII^e siècle, deux recensions des *Éléments* d'Euclide parmi les plus influentes voient le jour : celle de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (achevée en 1248) et celle de Campanus de Novare (composée vers 1260). Nous n'avons pas étudié celle d'aṭ-Ṭūsī, mais, à plusieurs reprises, nous avons mentionné une autre recension arabe, celle de Muhyī ad-Dīn al-Maghribī († 1283) qui, dans son Livre XV, propose une comparaison des *cinq* polyèdres réguliers selon plusieurs critères, dont la surface et le volume, comparaison qui inclut donc presque entièrement l'équivalent de notre Livre XIV[83].

La recension de Campanus

Dans le domaine médiéval latin, cette recension transmet ce qui paraît être la meilleure version du point de vue de la complétude et de la cohérence déductive, celle

[83] Rappelons que ce livre XV d'al-Maghribī a été édité et traduit en anglais dans [Hogendijk, 1993].

aussi qui apporte la première amplification *réelle* desdits livres. Pour ce faire, Campanus a réalisé un certain nombre d'opérations éditoriales[84] :

• le déplacement d'unités textuelles (Cf. *Camp.* XIV 2-3 = XIII 9^{bis} – lemme SEMR) ;

• l'ajout de divers Lemmes [*Camp.* 501.297-313 (sur la compatibilité de la SEMR et de la dichotomie, pour *Camp.* XIV 8 = XIV **3**) ; *Camp.* 507.468-489 (postposé, indiquant la construction des droites ∂_1, ∂_2 pour *Camp.* XIV 9 = XIV **4**) ; *Camp.* 507.490–508.25 et *Camp.* 508.526–509.543 (appartenant au domaine des *Sphériques* pour *Camp.* XIV 10)].

• l'insertion d'explication concernant la notation latine des fractions (*Camp.* 502.357–503.385 pour la seconde preuve de XIV **3** et son Lemme) ;

Il a également amélioré la fin si problématique du Livre : le résultat d'Apollonius ($V_{12} : V_{20} :: S_{12} : S_{20}$) est l'objet de sa Proposition XIV 10 (*Camp.* 509.544–510.581), mais sans diagramme, ni ecthèse, ni diorisme. Il la fait suivre d'un rappel explicite de *Camp.* XIV 8 (= XIV **3**), d'où il en déduit : « $V_{12} : V_{20} :: a_6 : a_{20}$ » (= XIV **5**, *Camp.* 510.581-587), ainsi transformée en une sorte de corollaire immédiat de la conjonction de *Camp.* XIV 8 et 10. Il rappelle alors explicitement *Camp.* XIV. 9 (= XIV **4**, dans une formulation linéaire, comme dans la famille Téhéran 3586 et la tradition adélardienne), d'où il déduit la proportion : $\partial_1 : \partial_2 :: V_{12} : V_{20}$. La séquence correspond assez bien aux assertions (1) et (6) des récapitulations I. L'absence des portions (2)-(5) s'explique dans la mesure où elles ne servent qu'à rappeler l'enchaînement qui a permis d'établir XIV **5** à partir du résultat d'Apollonius, enchaînement de fait contigu dans la version de Campanus après le déplacement du Lemme SEMR en tête de Livre. Leur rappel est donc inutile.

Vient alors une sorte de récapitulation générale : $a_6 : a_{20} :: S_{12} : S_{20} :: \partial_1 : \partial_2 :: V_{12} : V_{20}$, puis un éloge, semble-t-il original, de la section en extrême et moyenne raison (*Camp.* 510.605–511.610) :

> « Merveilleux donc est le pouvoir d'une ligne divisée en extrême et moyenne raison, car la plupart des choses dignes de l'admiration des philosophes s'accordent avec elle ; cette primauté procède de l'invariable nature de principes supérieurs, d'où, pour des solides si divers par leur grandeur, par le nombre de leurs bases et par leur nature (?) irrationnelle (figura irrationali), une certaine harmonie, laquelle peut les unifier rationnellement ».

Campanus tenait là une belle conclusion, mais son Livre XIV se poursuit par l'adjonction de 8 Propositions supplémentaires que l'on peut résumer ainsi :

• XIV 11 : Dans un triangle équilatéral de côté c_3 et de hauteur h, on a[85] : $(c_3)^2 = (4/3).h^2$.

D'où :

• XIV 12 : c_3 exprimable $\Rightarrow$ f_3 [$= (1/2)c_3.h$, avec (c_3, h) commensurables en puissance seulement] médiale.

---

[84] Voir aussi *infra,* le Tableau 3 de notre ANNEXE.

[85] Cf. al-Maghribī XV 1 : $h^2 = (3/4).(c_3)^2$!

• XIV 13 : D exprimable $\Rightarrow$ S_4 S_8 médiales (car $S_4 = 4f_3$, $S_8 = 8f_3$) et, puisque $D^2 = 3/2(a_4)^2 = 2(a_8)^2$ d'après XIII 13-14, D exprimable $\Leftrightarrow$ c_3 exprimable. On est donc ramené à XIV 12.
• XIV 14 : $f_4 = (4/3).f_8$ (car f_4 et f_8 sont semblables et donc $f_4 : f_8 :: (a_4)^2 : (a_8)^2$ d'après VI 20 Por.)[86]. On en déduit que[87] : $S_8 = 8f_8 = 8x(3/4)f_4 = 6f_4 = (3/2).S_4$
• XIV 15 est un Lemme géométrique sur la pyramide régulière : la droite menée à partir de l'un des sommets sur la base opposée en passant par le centre de la sphère circonscrite à la pyramide tombe sur le centre du cercle circonscrit à ladite base et est perpendiculaire au plan de cette base.
• XIV 16 est un Lemme géométrique sur l'octaèdre régulier : l'octaèdre inscrit dans une sphère se divise en deux pyramides dont la hauteur est le demi-diamètre de la sphère et la base est un carré sous-double du carré du diamètre de la sphère.

Ces deux Lemmes sont utilisés dans :

• XIV 17 : Le rapport $V_4 : V_8$ est le même que Rect (lm, ln) : D^2 avec :
  D = diamètre de la sphère circonscrite aux deux solides ;
  $(lm)^2 = (3/4)[(3/4).a_4]^2$, formulation compliquée [sous-sesquitierce, en puissance, des trois-quarts (dodrantem) de a_4] pour signifier $(lm)^2 = (27/64)(a_4)^2$;
  $ln = (3/4).a_4 + (5/27).[(3/4).a_4]$, formulation compliquée pour signifier $ln = (8/9)a_4$.
  De ce résultat[88], Campanus déduit le Porisme : $p_4 = (1/6).D$
• XIV 18 : $S_6 = 2D^2$; $p_6 = (1/2).a_6$

Même si, comme nous l'avons indiqué en note, ces Propositions supplémentaires rappellent certains des résultats du Livre XV de la recension d'al-Maghribī, l'ensemble reste très incomplet. Rien n'est dit, par exemple, à propos des rapports $V_6 : V_8$, $S_6 : S_8$ (qui, de surcroît, sont identiques), $S_{20} : S_8$, $V_{20} : V_8$ …

Le Livre XV d'al-Maghribī

La recension d'al-Maghribī, composée à Maraghā avant 1261, réorganise la fin des *Éléments :* ses livres XIII-XIV correspondent aux Livres XIII et XV du grec, avec des compléments, mais en séparant ce qui relève de la géométrie plane d'un côté (Maghribī XIII) et de la stéréométrie de l'autre (Maghribī XIV). Son Livre XV propose une comparaison systématique des *cinq* polyèdres réguliers inscrits dans une même sphère en exhibant cinq ensembles de cinq lignes qui sont respectivement dans le rapport (***i***) des arêtes (a_n) des polyèdres, (***ii***) des distances (p_n) des faces au centre de la sphère, (***iii***) des surfaces (S_n) des polyèdres, (***iv***) de leurs faces (f_n) et (***v***) de leurs volumes (V_n). Il contient 37 Propositions et une bonne douzaine de corollaires.

---

[86] Cf. al-Maghribī XV 2 corollaire.
[87] Cf. al-Maghribī XV 17.
[88] Comparable à al-Maghribī XV 20 + corollaire, dont les expressions (géométriques) sont visiblement plus simples : $V_4 : V_8 :: c_3 : 3h$ (M 20) ; $V_4 : V_8 :: a_4 : 3a_8$ (M 20 Porisme). En écritures modernes, $V_4/V_8 = (2\sqrt{3})/9$.

Fait particulièrement remarquable, le Livre XV de cette recension est apparenté à un texte hébraïque encore inédit, contenu dans le manuscrit Oxford, *Bodley, Hebr.* d.4, et découvert par Tzvi Langermann[89]. Il a été traduit de l'arabe presque entièrement par Kalonymos ben Kalonymos en 1309, puis complété ultérieurement pour deux théorèmes. En tout, il en comporte 34, sans diagrammes. La comparaison des textes arabe et hébreu permet d'affirmer de manière catégorique qu'ils procèdent d'une source commune, mais l'ordre des théorèmes, leur statut, certaines preuves, diffèrent entre les deux textes[90]. Celui découvert par Langermann est au demeurant moins "complet" puisqu'il mène sa comparaison des cinq figures seulement pour (p_n), (S_n), (V_n). En revanche, il contient une préface qui n'existe pas chez al-Maghribī. Par conséquent, le texte hébraïque n'est pas la simple traduction du Livre XV d'al-Maghribī et les deux exposés, quoique indépendants l'un de l'autre, procèdent d'une source commune.

Deux questions s'imposent : que peut-on dire de cette source commune ? Quelle relation entretient-elle avec le Livre XIV ? Cette seconde question est certainement moins compliquée que la première. Déjà du point de vue matériel, le Livre XV d'al-Maghribī et son homologue hébraïque contiennent pratiquement la totalité des ingrédients mathématiques du Livre XIV comme le montre le petit tableau ci-dessous :

Livre XIV	**Recension d'al-Maghribī**	**Texte hébraïque**
Préface	—	Préface divergente
XIV **1**	XV 7	Bodl. 22
XIV **1/2**	XV 4	Bodl. 15
XIV **2**	XV 5	Bodl. 16
XIV **2/3** <a>	XV 9	Bodl. 27
XIV **2/3** <b>	XV 10	Bodl. 28
XIV **2/3** <c>	XV 10 Cor.	Bodl. 29
XIV **3**	—	Bodl. 31

[89] Tzvi Langermann a eu l'extrême amabilité de nous communiquer ses notes inédites, incluant une traduction anglaise complète de ce texte. Elles donnaient également de précieuses indications sur un autre manuscrit hébreu, appartenant à la bibliothèque de Mantoue, lequel contient une encyclopédie géométrique anonyme dont la section intitulée : « sur les rapports entre les cinq figures en ce qui concerne leurs hauteurs, bases, aires et volumes » inclut la majeure partie du matériau mathématique du texte de la Bodléiane, avec certains remaniements éditoriaux et ajouts. Nous l'en remercions vivement. Bien entendu, nous n'avons pas exploité la totalité de ce riche matériau et nous invitons le lecteur à se reporter à la publication que prépare Tzvi Langermann.

[90] L'exposé d'al-Maghribī se divise globalement en cinq parties portant successivement sur : (*i*) des résultats préliminaires au sujet des arêtes des polyèdres (1-6) ; (*ii*) des théorèmes au sujet des faces (7-11) ; (*iii*) des surfaces des polyèdres (12-17) ; (*iv*) leurs volumes (18-30) ; (*v*) enfin la comparaison proprement dite (31-37). Le plan est totalement différent dans le texte hébraïque qui compare successivement tétraèdre et octaèdre réguliers (1-7), cube et octaèdre (8-12), icosaèdre et octaèdre réguliers (13-26), dodécaèdre et icosaèdre réguliers (37-33) avant d'entreprendre la comparaison des cinq figures (34-36). Plusieurs des corollaires d'al-Maghribī, tels que les a distingués Hogendijk (XV 3cor., 12cor., 13cor., 15cor., 18cor., 19cor.), sont des portions de la Proposition correspondante dans le texte hébraïque (respectivement Bodl. 8, 11, 18, 20, 6). D'autres constituent des Propositions à part entière (XV 2cor. = Bodl. 3 ; XV 3cor. 2 = Bodl. 9 ; XV 10cor. = Bodl. 29 ; XV 16cor. = Bodl. 32).

XIV **3/3***aliter*	XV 11	Bodl. 30
XIV **3***aliter*	XV 16	Bodl. 31*aliter*
XIV **4**	XV 6	Bodl. 17 (corrompu[91])
XIV **5**	—	—
—	XV 16 Cor.	Bodl. 32
	$S_{12} : S_{20} :: \partial_1 : \partial_2$	
Lemme SEMR	XIII 10	Bodl. 13
Récapitulation ($V_{12} : V_{20} :: \partial_1 : \partial_2$)	XV 30	Bodl. 33
[XIII 9^{bis}]	XIII 14	Bodl. 14

Quelques remarques :

• Même si les textes divergent, la séquence Bodl. 13-14-15-16 correspond à l'ordre et à la consécution que l'on observe dans Campanus pour le groupe « SEMR + XIII 9 + XIV **1/2** + XIV **2** », déductivement satisfaisant.

• L'absence de XIV **3** chez al-Maghribī est certainement le résultat d'un accident de transmission, puisqu'il existe dans le texte hébraïque et, surtout, parce qu'al-Maghribī possède les trois parties du Lemme XIV **2/3** qui ne sert précisément à rien d'autre qu'à la preuve de XIV **3**.

• La suspecte Proposition XIV **5** ($V_{12} : V_{20} :: a_6 : a_{20}$), simple conjonction de XIV **3** et du résultat d'Apollonius ($V_{12} : V_{20} :: S_{12} : S_{20}$), n'existe dans aucune des deux versions, mais elles parviennent à la même récapitulation finale que le Livre XIV, en combinant autrement les résultats préalablement acquis : XIV **3** et XIV **4** pour obtenir XV 16 Cor. = Bodl. 32, puis le résultat d'Apollonius établi dans XV 30 = Bodl. 33, à peu près de la même manière que dans la première partie de XIV **5**.

• Les noyaux argumentatifs des preuves d'al-Maghribī et du texte hébraïque — au-delà de petites divergences textuelles, notamment au niveau des énoncés — sont les *mêmes* que ceux des démonstrations du Livre XIV, plus précisément celles de la branche représentée par la famille Téhéran 3586. Cela est particulièrement clair pour XIV **2/3** <c>, XIV **4**, pour la construction alternative de XIV **3***aliter*[92] dans les deux versions, dans le (seul) texte hébraïque pour XIV **3**.

Quelques divergences sont un peu plus importantes :

• La fin de preuve du Lemme SEMR utilise ses constructions supplémentaires de sommes de droites dans nos deux versions[93].

• La fin de preuve du Lemme XIV **3/3***aliter* est améliorée par rapport à la version du Livre XIV dans la famille Téhéran 3586 (où le texte a souffert)[94].

---

[91] Mais la formulation des preuves de Bodl. 18 et 32 présupposent que le texte hébraïque contenait bien initialement cette Proposition, comme c'est le cas chez al-Maghribī.

[92] Voir ANNEXE, Tableau 4, notes 101, 138, 149.

[93] Voir ANNEXE, Tableau 4, note 184.

• Contrairement au texte hébraïque, la preuve de XIII 9^{bis} (= XIII 10) chez al-Maghribī n'est pas celle de *Él.* XV 1 (avec droite auxiliaire), mais celle fondée sur XIII 9^{conv} + XIII 5 que nous avons évoquée à propos de Campanus[95].

Mais ces faibles écarts ne permettent pas de douter que nos deux versions de la comparaison des *cinq* polyèdres sont bel et bien des amplifications du Livre XIV et, en fait ce point est confirmé par le texte hébraïque d'une manière quelque peu paradoxale, du moins en apparence.

Celui-ci possède en effet une préface – délicate à interpréter, mais qui peut s'avérer cruciale quant au statut du texte –, ainsi qu'un nombre non négligeable de références à des auteurs anciens (éliminées par al-Maghribī) : il s'agit, pour l'essentiel, de renvois à Euclide (pour certains résultat des *Éléments*), de mentions d'Apollonius et, juste après l'invocation du Créateur qui ouvre la préface, de la citation d'un certain Mesenclunos, présenté comme « le correcteur du Livre d'Apollonius *Sur le rapport mutuel du dodécaèdre et de l'icosaèdre,* qui est le Livre XIV des *Éléments* d'Euclide »[96].

L'auteur de la préface fait ensuite l'éloge des cinq figures régulières, rappelle que les Anciens les associaient aux éléments cosmiques, qu'aucune autre n'est inscriptible dans la sphère, puis, il indique assez clairement qu'il a lui-même entrepris un travail de complétion pour exposer ce qu'il en est des rapports des *cinq* figures quant à leurs hauteurs, surfaces et volumes. Il ajoute qu'il a recueilli ce qu'Apollonius avait discuté au sujet de *deux* de ces figures et qu'il indiquera dans la suite chacune des propositions qu'a mentionnée Apollonius pour distinguer son traité du sien.

Il paraît donc acquis que trois personnages sont à distinguer : Apollonius, son correcteur Mesenclunos et l'auteur de la comparaison des *cinq* figures en tant que complétion du travail des Anciens. Or, dans la suite du texte hébraïque, on trouve en effet des mentions d'Apollonius :

• Après une première preuve de Bodl. 13 (= Lemme SEMR) que le traité fait suivre d'une preuve alternative revendiquée comme personnelle.
• Après Bold. 15 (= XIV **1/2**).
• Après Bold. 16 (= XIV **2**) ; ici, il est même précisé qu'Apollonius l'avait présentée d'une manière *similaire,* mais que l'Auteur l'a améliorée pour la rendre plus accessible aux étudiants. Or la preuve de Bold. 16 est effectivement une nette clarification de la preuve, quelque peu laconique, de XIV **2**.
• Dans une charnière de transition, intercalée entre Bold. 26 et 27, autrement dit avant la séquence Bold. 27-33 qui correspond à XIV **2/3** <a>, XIV **2/3** <b>, XIV **2/3** <c>, XIV **3/3***aliter,* XIV **3**, XIV **3***aliter*, (introduite par : « Apollonius dit : "que ceci soit démontré d'une autre manière" ») et la récapitulation finale.

---

94 Voir ANNEXE, Tableau 4, note 133.
95 Voir *supra,* § 2, note 22.
96 Nous paraphrasons, en français, la traduction anglaise que Langermann nous a fournie. Le lecteur peut aussi consulter [Hogendijk & Langermann, 1984] et [Hogendijk, 1993], pp. 140-142.

Autrement dit, l'Auteur du texte hébraïque, ou sa source, cite Apollonius pour les portions qu'il reprend au Livre XIV des *Éléments* ! Son seul oubli est XIV **1**, qu'il ne rapporte pas à Apollonius[97] ; mais il ne lui attribue *rien* qui ne soit dans le Livre XIV.

Dès lors, il est très probable, comme l'a suggéré Hogendijk, que Mesenclunos soit une traduction hébraïque plus ou moins fidèle de « Insiqlâwus », une des formes arabes d'Hypsiclès (avec Ibsiqlâwus, Isqilâwus). À partir de la préface du Livre XIV, peut-être aussi parce qu'il connaissait la cheville de transition historique insérée entre XIV **1** et **1/2** et l'histoire arabe des Livres additionnels que nous avons nous-mêmes rapportée[98], l'Auteur de la *Comparaison des cinq figures* a adopté une opinion assez proche de celle que nous avons évoquée à propos de Pierre de la Ramée (!) : le véritable auteur — mathématique — du Livre XIV est Apollonius, Hypsiclès n'en est que le "correcteur". Autre conséquence : la source commune au texte hébraïque et à al-Maghribī (Hogendijk la note **A**), consistant essentiellement en une extension du Livre XIV aux cinq polyèdres, est postérieure audit Livre. En 1984, Hogendijk et Langermann privilégiaient l'hypothèse que (**A**) soit la traduction arabe d'un traité hellénistique perdu. En 1993, Hogendijk rappelle l'existence d'une épître attribuée à al-Kindī portant *Sur la révision des Livres XIV-XV* et suggère (prudemment) que la source **A** puisse être un traité arabe appartenant à la même période (IX^e s.).

Pour notre part, nous trouvons la seconde hypothèse plus vraisemblable que la première : les renvois du texte hébraïque incluent le Lemme SEMR qui est très certainement un ajout tardif au Livre XIV comme nous l'avons dit à plusieurs reprises. Plutôt qu'à une (laconique) monographie de l'époque hellénistique, la source **A** — qu'il s'agisse d'un texte original ou d'une traduction — s'apparente plutôt aux versions remaniées des éditeurs de l'Antiquité tardive ou des savants réviseurs de la tradition arabe.

L'amplification des Livres additionnels se poursuivra longtemps dans la tradition euclidienne, tant que durera la fascination pour les polyèdres réguliers. L'objet de cet article n'est pas d'en suivre les détails. Contentons-nous de signaler que les ajouts proposés par la recension de Campanus au Livre XIV (ainsi qu'au Livre XV) seront repris à la Renaissance par Pacioli (1509), Tartaglia (1565), Candalle de Foix (1566, 1578). L'extension du Livre XV est au demeurant plus intéressante, car elle a permis la réappropriation progressive des polyèdres archimédiens semi-réguliers, tant dans la tradition arabe, avec l'ajout d'un Livre XVI (!)[99], que latine, avec la recherche quelque

---

97 Nous ne savons pas s'il lui attribuait XIV **4** (= Bodl. 17) car le texte en est gravement mutilé.

98 Voir [Vitrac-Djebbar, 2011], I, § 10, pp. 79-83.

99 Il est anonyme, connu seulement par un unique manuscrit (copié en 1593-1594) de la recension de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī. Il contient 19 Propositions et propose la construction de plusieurs polyèdres semi-réguliers engendrés à partir des polyèdres réguliers. Il semble avoir été conçu en généralisant le Livre XV et certaines procédures de constructions mis en œuvre par Euclide dans le Livre XIII :

(*i*) il utilise la dichotomie des arêtes des polyèdres réguliers pour engendrer le cuboctaèdre et l'icosidodécaèdre (en remarquant leur double engendrement possible) ;

peu forcenée de systématicité d'un Candalle de Foix[100]. Le travail de Campanus illustre parfaitement deux points :

(*i*) la recherche de complétion qu'a suscitée le traitement euclidien des polyèdres réguliers, perçu comme lacunaire, même après, peut-être *surtout après,* l'adjonction des Livres XIV-XV.

(*ii*) Le type de compétence mathématique que cela exige, notamment la pleine compréhension de la structure déductive et du mode euclidien d'exposition, ce que l'étude des *Éléments* a précisément comme fonction d'enseigner. On peut dire la même chose de la source **A** commune au Livre XV de la recension d'al-Maghribī et au texte hébraïque apparenté.

Cela dit, les limites de ces travaux de complétion sont tout aussi évidentes, car nos auteurs médiévaux se limitent aux conséquences les plus élémentaires de ce qui était contenu dans les Livres XIII-XV.

(*ii*) il généralise en trichotomisant les arêtes des polyèdres réguliers à faces triangulaires, ce qui engendre trois des polyèdres semi-réguliers dits tronqués puis il étend la procédure au cube et au dodécaèdre. Il construit donc les sept polyèdres archimédiens constructibles par simple troncature et il montre qu'ils sont circonscriptibles à une sphère.

(*iii*) Enfin il établit comment produire deux familles infinies de polyèdres semi réguliers : les prismes et les antiprismes à base polygonale régulière, sans doute en analysant la construction euclidienne de l'icosaèdre. Ce Livre XVI est édité et traduit en anglais dans [De Young, 2008].

[100] Le Livre XVI de la tradition latine est dû à François de Foix, comte de Candalle. Dans son édition de 1566, il ajoute 8 Propositions dans le Livre XIV, portant notamment sur les rapports $p_6 : p_8$, $V_8 : V_4$, $V_6 : V_8$, $S_6 : S_8$, et dans le Livre XV, il ajoute les huit inscriptions mutuelles que Campanus n'avait pas traitées. Quant à son livre XVI, il se divise en deux parties portant essentiellement sur les rapports : (1) du type $a_m : a_n$ (Prop. 1-24), (2) du type $V_m : V_n$ ou sur l'excès $V_m - V_n$ (Prop. 25-37), dans lesquels a_n est l'arête d'un polyèdre régulier P_n inscrit dans P_m. Il s'agit donc de produire le même genre de résultats que ceux du Livre XIV, mais dans les configurations géométriques du Livre XV.

À la suite de son seizième Livre, il ajoute un très court *De mixtis et compositis regularibus solidis* qui traite de la construction de deux des polyèdres semi-réguliers archimédiens ("exoctahedron" et "ycosidodecahedron"). Il fait explicitement le lien avec XV 2 (pyramide régulière → octaèdre). Ces livres additionnels de Candalle ont été largement diffusés car le Livre XVI et le *De mixtis* ont été ajoutés à la première traduction anglaise des *Éléments* (par Henry Billingsley, en 1570) et Clavius a ajouté un Livre XVI à sa propre recension (au moins à partir de la deuxième édition de 1589) qu'il dit reprendre à Candalle et qui le contient en effet à peu près entièrement dans sa première partie, avec d'autres ajouts.

Dans la réédition de 1578, c'est 3 Livres : XVI, XVII , XVIII que Candalle ajoute aux *Éléments* ! Dans le Livre XVI, il insère 9 Propositions supplémentaires sur les mêmes catégories de rapports. Le *De mixtis ... solidis* devient Livre XVII et examine désormais toutes les inscriptions mutuelles possibles de "ses" deux polyèdres semi-réguliers avec les 5 solides réguliers (27 Propositions). Dans le Livre XVIII, Candalle poursuit le travail du Livre XVI (rapports $a_m : a_n$, $V_m : V_n$) dans le cas où l'un des polygones inscrits et/ou circonscrits (P_n, P_m) est l'un de ses deux polyèdres semi-réguliers sans oublier leurs inscriptions mutuelles pour un total de 45 Propositions !

Clairement, il s'agit d'obtenir l'exposé le plus systématique et le plus clôturé qui soit. Dans cette version, la thématique des polyèdres (Livres XIII-XVIII) représente globalement 30 % des *Éléments.*

CONCLUSION

Nous avons essayé de comprendre les modalités de composition et de suivre les étapes de la transmission du livre dit XIV des *Éléments* pendant près d'un millénaire et demi. Cette histoire commence avec Hypsiclès d'Alexandrie. Celui-ci, inspiré par un travail antérieur d'Apollonius qui n'avait pas satisfait ses premiers lecteurs, composa une monographie sur un sujet identique, la comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre réguliers inscrits dans une même sphère. Malgré la mise en œuvre de résultats que nous connaissons aujourd'hui par le seul Livre XIII, rien ne permet d'affirmer que l'objectif d'Hypsiclès était de "compléter" Euclide.

Vers la fin de l'Antiquité, probablement à la charnière des V^{e} et VI^{e} siècles de notre ère, quelque(s) érudit(s) entrepri(ren)t d'adjoindre cette monographie aux treize Livres d'*Éléments,* soit qu'on trouva l'exposé euclidien incomplet, soit qu'on voulut ainsi assurer la sauvegarde d'un corpus traitant des polyèdres réguliers dans lequel se trouvait peut-être aussi ce qui est devenu pour nous le Livre XV.

Nous ne savons rien de l'histoire du texte d'Hypsiclès, entre sa composition initiale au II^{e} siècle avant notre ère et son adjonction aux *Éléments,* par exemple nous ignorons s'il avait déjà été soumis à un travail éditorial de complétion pour en assurer l'autonomie (en justifiant le résultat d'Apollonius — $S_{12} : S_{20} :: V_{12} : V_{20}$ — qu'il présupposait) et en raffermir la structure en ajoutant des lemmes de complétude déductive (lemme SEMR, XIII 9bis). Ce qui nous est parvenu en grec conduit à penser que l'objectif poursuivi avec l'adjonction était plutôt patrimonial que mathématique car :

- La structure déductive n'est pas complètement satisfaisante (place du lemme SEMR, place ou absence du lemme XIII 9bis).
- Le résultat reste tout à fait incomplet du point de vue mathématique, ce qui engendrera des velléités successives de complétion aux époques médiévale et moderne [de la *Comparaison des cinq figures,* source commune (**A**) à al-Maghribī et au texte hébraïque associé (?) jusqu'à Candalle de Foix].
- Localement certains arguments sont bien "abrupts", notamment le début des portions « démonstration » de XIV **2** et XIV **3**.
- La volonté de compiler les différents ingrédients de la tradition exégétique est perceptible dans l'existence de la double preuve de XIV **3** et les doubles récapitulations finales.
- L'homogénéité textuelle complète n'est pourtant pas atteinte, puisque deux états du texte grec (***M*** \ ***PBVv***) nous sont parvenus. Si leurs divergences ont une faible portée mathématique, elles sont néanmoins révélatrices du point de vue textuel, notamment dans des portions comme la préface, l'énoncé du Lemme XIV **1/2**, la fin des portions « démonstration » de XIV **4** et du Lemme SEMR.

En dépit de ces variantes, par comparaison avec ce qu'on peut observer dans les Livres I à XIII, il reste cependant raisonnable de dire qu'il s'agit du "même" texte mathématique et on peut y voir la confirmation de l'hypothèse selon laquelle il n'y eut qu'une édition grecque du Livre XIV.

À l'inverse de ce qui s'observe dans les Livres I à XIII, la quasi totalité de la version la plus riche (***PBVv***) de ce matériau textuel grec a été connu de la tradition indirecte arabe. À quelques inévitables variantes près, inhérentes au processus de transmission manuscrite, on le retrouve traduit dans la version du manuscrit Rabat 1101 avec une proximité qui, à notre connaissance, n'a jamais été observée en ce qui concerne les livres authentiques dans quelque version arabe ou arabo-latine que ce soit.

La situation se complique du fait de l'existence d'une autre branche de la tradition indirecte arabe, celle de la famille Téhéran 3586. Là aussi, le même contenu strictement mathématique est maintenu. Mais les variantes structurelles, globales et locales, vis-à-vis du texte grec et de la version du manuscrit Rabat 1101, sont considérables. Comment peut-on expliquer une telle dichotomie à l'intérieur de la tradition médiévale ? En raisonnant *a priori,* on entrevoit au moins deux possibilités :

1) Le Livre XIV a été traduit au moins deux fois, soit par deux traducteurs différents, soit par le même, mais à partir de modèle(s) grec(s) sensiblement divergents.
2) Il n'a été traduit qu'une fois, par Qusṭā Ibn Lūqā — hypothèse qui a la faveur des spécialistes de la tradition arabe —, mais différentes recensions de cette (unique) traduction ont été élaborées et deux d'entre elles (au moins) ont affecté sa transmission.

Rappelons d'abord les informations transmises par les témoignages bio-bibliographiques et les colophons des manuscrits arabes. (Au moins) trois savants du IX^{e} siècle sont censés avoir joué un rôle dans l'histoire des livres additionnels :

• Qusṭā Ibn Lūqā, traducteur, actif vers 870.
• Thābit Ibn Qurra (mort en 901), réviseur d'Isḥāq pour les Livres I-XIII, à qui al-Qifṭī attribue un commentaire sur les Livres XIV-XV[1], apparemment non mentionné dans le *Fihrist.*
• Al-Kindī (mort vers 870), à qui la tradition attribue une épître intitulée *Sur la révision des Livres XIV-XV* (*Iṣlāḥ al-maqāla ar-rābi'a 'ashra wa-l-hāmisa 'ashra min Kitāb Uqlīdis*)[2]. Elle est perdue, mais citée dans la liste des écrits géométriques d'al-Kindī dressée par Ibn an-Nadīm (*Fihrist,* Ch. VII, section 1), liste reproduite par al-Qifṭī[3].

Ainsi, aucun autre traducteur du Livre XIV n'est mentionné hormis Qusṭā Ibn Lūqā, et il y a là une différence avec ce même genre de sources à propos des Livres I à XIII. En

[1] Voir [Kapp, 1935], p. 65 (N°86).
[2] Voir [Sezgin, 1974], p. 258.
[3] Voir [Kapp, 1935-36], pp. 42-56. L'Épître en question est le n°13 de la page 48.

particulier, comme nous l'avons déjà dit, il n'y a pas de témoignage concernant une traduction des Livres additionnels par al-Ḥajjāj. En sens inverse, on pourrait observer avec prudence que le manuscrit Rabat 1101 fait partie de ceux qui ne citent pas Qusṭā Ibn Lūqā comme traducteur mais, comme l'Escorial 907, qui lui est apparenté, possède cette mention, il pourrait s'agir d'une perte propre au manuscrit.

Les écarts entre les textes des deux branches de la tradition arabe sont importants, mais il n'est pas sûr qu'ils permettent de distinguer entre deux *traductions* différentes et une traduction et sa *révision,* laquelle pourrait suffire à rendre compte de deux états différents du texte. Ainsi le lexique technique est *quasi* identique dans les deux versions. Au demeurant le Livre XIV n'introduit, déjà en grec, aucun terme géométrique qui ne se trouve pas dans les Livres I à XIII. Si l'(unique) traduction du Livre XIV est due à Qusṭā Ibn Lūqā, dans la seconde moitié du IX^{e} siècle, la terminologie arabe pour rendre les *Éléments* d'Euclide était sans doute suffisamment stabilisée pour qu'on n'observe plus de variation sur ce point.

Un des rares écarts stylistiques concerne l'expression soit géométrique, soit arithmético-multiplicative de certains énoncés (XIV **2/3**, XIV **3/3***aliter,* XIV **3***aliter*) ou figurant dans des étapes de démonstration. D'un côté, on s'astreint à parler de « rectangle contenu (ou de surface contenue) par telle et telle ligne », de l'autre, on s'autorise à utiliser des formes plus compactes comme « le produit résultant de … par … », « le produit de … par … ». La différence est assez frappante. Surtout, dans l'étude de la tradition arabe des Livres authentiques, on a remarqué que la traduction attribuée à Isḥāq, et révisée par Thābit, maintenait d'une manière cohérente les formulations géométriques en accord avec le grec, tandis que le format multiplicatif — en fait *les* formats multiplicatifs, car il y a des variantes ! — se trouvai(en)t dans des citations rattachées aux travaux d'al-Ḥajjāj[4]. Sans contester que l'origine de cette variation dans la tradition euclidienne est telle, on peut observer qu'elle a été semble-t-il perçue dans le Livre XIV comme un simple procédé d'abréviation. Ainsi, la version du manuscrit Escorial 907 reprend des éléments arithmético-multiplicatifs à la famille Téhéran 3586 en les reformulant dans le format géométrique qu'Escorial 907 partage avec Rabat 1101. En fin de compte, il n'est guère possible de falsifier l'hypothèse selon laquelle il n'y aurait qu'une seule traduction arabe desdits Livres – celle de Qusṭā Ibn Lūqā – par des critères internes.

Au demeurant, même si l'information concernant Thābit n'est pas confirmée par ailleurs, il n'est pas invraisemblable qu'il ait aussi révisé les Livres XIV-XV pour compléter Isḥāq. S'il a procédé comme pour les Livres authentiques, il a pu consulter d'autres manuscrits grecs et introduire ainsi de nouvelles leçons. Quant à al-Kindī, il ne semble pas qu'il connaissait le grec[5], et il s'appuyait donc sur une traduction préalable des Livres XIV-XV. Peut-il s'agir de celle de Qusṭā ? Compte tenu de la chronologie

---

4 Voir [De Young, 1991] et [Djebbar, 1996].
5 Voir [Endress, 1997], p. 44.

relative de ces deux savants, la traduction serait alors plutôt un travail de jeunesse de Qusṭā et l'*iṣlāḥ* d'al-Kindī, à l'inverse, un travail de sa grande maturité. Cela dit, une telle division du travail s'est apparemment produite pour l'*Anaphoricos,* l'un des autres écrits d'Hypsiclès ! D'après M. Abattouy, dans un manuscrit de ce texte récemment exploité par lui[6], on mentionne précisément que la traduction de l'*Anaphoricos* est celle de Qusṭā, révisée par al-Kindī (*Kitāb Absqalawus fī al-maṭāli', naql Qusṭā Ibn Lūqā al-Ba'labakkī wa iṣlāḥ al-Kindī*). Que l'*iṣlāḥ* d'al-Kindī des Livres additionnels s'appuyait sur la version de Qusṭā semble donc possible.

Selon l'une et/ou l'autre de ces hypothèses (Thābit, al-Kindī), un tel travail, même basé sur la traduction de Qusṭā, a bien pu aboutir à l'élaboration, puis à la mise en circulation, de deux états différents du texte. L'existence d'une telle version *améliorée,* jouant effectivement un rôle dans la transmission ultérieure du Livre XIV, pourrait suffire à expliquer les divergences que nous avons relevées.

Dans ce scénario, la version révisée, améliorée et enrichie, s'apparenterait tout naturellement à celle que nous avons trouvée dans la famille Téhéran 3586. Par contraste, on rapprocherait le texte du manuscrit Rabat 1101 de la traduction de Qusṭā qui, helléniste, aurait maintenu une grande proximité vis-à-vis de son modèle grec. Cela dit, il est peut-être difficile de soutenir à la fois que le texte de Rabat 1101 est, du point de vue de l'histoire du texte, "antérieur" à celui de la famille Téhéran 3586, que ce dernier procède d'une version amplifiée et de constater qu'il n'a ni les secondes récapitulations, ni la cheville de transition insérée après XIV **1**, ni la préface sous leurs formes complètes, trois ingrédients qui se trouvent dans Rabat 1101. Que les secondes récapitulations aient été éliminées par un Réviseur, cela peut se comprendre, car elles sont redondantes, mais cela ne vaut pas vraiment dans le cas des deux autres items, à moins d'admettre que ledit Réviseur avait peu d'intérêt pour les portions métamathématiques du Livre XIV.

Dernière remarque concernant la tradition arabe, la version du manuscrit Rabat 1101 — le texte le plus proche de la traduction de Qusṭā selon le scénario précédent — n'a pas été totalement supplantée par la version remaniée : nous avons vu qu'elle est connue, et même à la base, de celle du manuscrit arabe Escorial 907, qu'elle a fortement déterminé les modèles des versions arabo-latines du compendium et de Gérard de Crémone. Le remplacement du nom d'Apollonius par celui d'Euclide en ses deux premières occurrences de la préface du Livre XIV dans l'Escorial 907 et le manuscrit arabe en caractères hébraïques BnF Hébr. 1381 encourage à faire une comparaison approfondie entre ces deux copies qui pourrait rattacher le manuscrit BnF Hébr. 1381 à la tradition attestée par le Rabat 1101. S'il est un trait frappant dans l'énumération qui précède, c'est que les copies arabes concernées appartiennent toutes à l'aire maghrébo-andalouse. Rien d'étonnant donc à ce qu'on en retrouve des éléments dans deux des trois traductions arabo-latines que nous avons étudiées. Sur cet aspect de la tradition euclidienne, il se peut

---

6 Codex Ms 258 Berlin, Staatsbibliothek, maintenant à Cracovie (Bibl. Jaggiellonska), f° 228^{v}). Voir [Abattouy, 2007], p. 69, n. 2.

que cette aire géographique ait joué le rôle d'un conservatoire, sous réserve bien entendu d'une exploration systématique de la tradition arabe qui reste à faire.

Pour sa part, la troisième traduction arabo-latine — de fait, la plus ancienne : celle attribuée à Adélard de Bath — procède de l'autre branche de la tradition arabe dont les deux composantes étaient donc connues en Occident musulman, puis dans le domaine latin, dès le XII^{e} siècle. On constate que l'incongruité globale de cette version — des Livres authentiques plus que laconiques ; un livre XIV enrichie — n'est pas le fait du traducteur latin, mais des modèles utilisés et de la riche activité éditoriale et exégétique qu'a connue la phase arabe de transmission du texte. Il est donc probable que Gérard de Crémone n'a pas, lui non plus, changer sa méthode de travail par rapport aux Livres I-XIII. Il s'est efforcé de recueillir la plus complète des versions parmi celles qui lui étaient accessibles et il faut probablement admettre qu'ont donc existé des modèles arabes bien plus enrichis encore que ceux de la famille Téhéran 3586. L'existence de la version du manuscrit Escorial 907 et du compendium arabo-latin confirme la thèse que les deux branches principales de la tradition arabe que nous avons reconnues ne l'épuisent pas.

Notre précédente étude du Livre X avait passablement affaibli l'hypothèse formulée par W. Knorr selon laquelle il était possible de reconstituer globalement, à partir des seules traductions arabo-latines attribuées à Adélard et Gérard, un archétype plus proche de l'original euclidien que les manuscrits grecs conservés. L'enrichissement de ces mêmes composantes de la tradition indirecte, vis-à-vis du texte grec du Livre XIV, que nous constatons – avec tout le travail éditorial que cela suppose à l'étape arabe de la transmission – ruine complètement un tel espoir. La présente étude confirme en revanche le constat inconfortable que l'histoire du texte des *Éléments* a été très complexe et que le résultat dépend du ou des Livres pris en considération.

ANNEXES

4. Tableau 4 : Comparaison locale de 3 versions du Livre XIV (Grec, *PBVv* / Arabe, Rabat 1101 / Arabe, famille du Téhéran 3586)

5. Tableau 5 : Statistique par famille et par unités textuelles

6. Tableau 6 : Comparaison de trois versions du Lemme XIII 9^{bis}

7. Variantes dans les diagrammes du Livre XIV

TABLEAU 4 : Comparaison locale de 3 versions du Livre XIV
(Grec, *PBVv* / Arabe, Rabat 1101 / Arabe, famille du Téhéran 3586)

Le (très long) tableau qui suit met en parallèle trois traductions : celle du texte grec commun aux manuscrits ***PBVv*** et celles des deux versions arabes réalisées par Ahmed Djebbar. Les abondantes notes infrapaginales remplissent plusieurs fonctions : elles rappellent certains éléments de l'apparat critique du texte grec quand ceux-ci se révèlent pertinents vis-à-vis de la tradition indirecte ; elles signalent des variantes relevées dans d'autres manuscrits, dans les traductions arabo-latines *Ad. I* et *GC,* dans les scholies VI-VII de cette seconde traduction, ainsi que dans la version arabo-latine dite compendium. Ce relevé ne saurait être exhaustif, mais il suffit certainement à mettre en évidence les parentés discernables entre traditions directe et indirecte ainsi qu'à l'intérieur de cette dernière.

En quelques occasions éclairantes, nous avons mentionné les propositions du Livre XV de la recension d'al-Maghribī (quand elles correspondent à des reprises du Livre XIV), ainsi que celles du texte hébraïque apparenté contenu dans le manuscrit Oxford, *Bodley, Hebr.* d.4. Leurs preuves sont très remaniées, aussi en avons-nous tenu compte d'une manière minimale.

Le lecteur comprendra que ces variantes, même ponctuelles, ne relèvent pas de la catégorie des erreurs (involontaires) de copistes chères aux philologues, mais résultent plutôt d'opérations éditoriales destinées à améliorer le texte en introduisant des rappels, en clarifiant l'identification de telle ou telle ligne, en allégeant certaines formulations, en détaillant certaines inférences jugées trop rapides. Elles supposent, de la part de leur(s) auteur(s), une attitude plutôt souple quant au respect du texte transmis, plus attentive à l'"esprit" qu'à la lettre et une compréhension minimale du contenu mathématique.

[Préface]

	GREC mss *PBVv*	Ms Rabat 1101	Famille du ms Téhéran 3586
(0)	—	Au nom de Dieu, … Livre d'Hypsiclès sur le quatorzième Livre du Livre des *Eléments*	Le quatorzième Livre sur les *Eléments* attribué à Hypsiclès et à Euclide, traduction de Qustâ Ibn Lûqâ.
(1)	Basilide de Tyr, ô Protarque, lorsqu'il vint à Alexandrie et fut mis en relation avec mon père à cause de l'affinité [qui leur venait] de l'étude, s'entretint avec lui pendant presque toute la durée de son séjour.	Basilide qui était un habitant de Tyr, ô Protarque, lorsqu'il fut à Alexandrie, il rencontra notre père qui avait avec lui un intérêt commun pour l'étude des sciences mathématiques. Il séjourna chez lui la plupart du temps de son absence.	Basilide de Tyr, ô Protarque, lorsqu'il vint à Alexandrie, il y séjourna avec mon père, pour la plus grande <partie> de son séjour[13] à cause de son affinité pour les mathématiques.
(2)	Un jour, ayant discuté[14] l'écrit d'Apollonius « *Sur la comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits dans la même sphère* », notamment quel est leur rapport mutuel,	Ils ont lu et vérifié, à certains moments, ce qu'avait écrit Apollonius au sujet de la comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère, chacun à l'autre, et du rapport de chacun des deux à l'autre.	Et ils étaient à la recherche du livre d'Apollonius qui donne le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre.
(3)	ils furent d'avis qu'Apollonius n'en avait pas traité correctement et ils en rédigèrent eux-mêmes une version corrigée, comme je l'ai entendu de mon père.	Et croyant que le livre écrit par Apollonius sur ce chapitre n'était pas correct, ils ont discuté les propos qui étaient dans ce livre, ils les ont corrigés et ils ont rédigé ce qu'ils avaient fait, selon ce que j'ai entendu de mon père.	Et ils s'imaginaient qu'Apollonius[15] ne l'avait pas corrigé et, selon ce que j'ai entendu du père, ils l'ont écrit et corrigé.
(4)	Mais moi-même, plus tard, je tombai sur un autre livre publié par Apollonius, contenant une démonstration exacte[16] sur la question proposée	Quant à moi, il m'est parvenu, après cela, un autre livre d'Apollonius dans lequel il a mis les propositions qu'il avait indiquées avec des démonstrations exactes.	Puis, après cela, j'ai trouvé un autre livre, écrit par Apollonius, contenant des démonstrations exactes donnant le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre, inscrits dans une même sphère.

[13] En fait plusieurs manuscrits de la même famille (København 81, Thurston 11, Téhéran 200) ainsi que l'Escorial 907 ont la même leçon que Rabat 1101 : "son absence" (ghaybatihi) au lieu de "son séjour" (maqâmihi) comme dans Téhéran 3586 et Uppsala 321. Sans doute s'agit-il d'une variante d'origine grecque : ἐπιδημία ("séjour") \ ἀποδημία ("absence "). *GC* (mansit) est proche de Téhéran 3586–Uppsala, 321.

[14] Variantes ***M*** (ζητεῖν) / ***PBV*** (διαλύειν) / ***v*** (διέρχομαι) : voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 89, note 7. Cf. ***M*** et Téhéran 3586, ***PBV*** et Rabat. On pourrait aussi envisager une correction "διελέγοντες" (= ayant discuté)].

[15] En ces deux premières occurrences du nom d'Apollonius, les manuscrits Escorial 907 et BnF Hébr. 1381 ont "Euclide". Il peut s'agir d'une erreur, mais il paraît plus vraisemblable d'y voir une variante introduite à partir de l'histoire de la généalogie des livres additionnels (voir [Vitrac-Djebbar, 2011], I, § 10) : il a paru peu vraisemblable qu'un même auteur, Apollonius, ait pu produire deux traitements du même sujet, l'un correct, l'autre non. Puisque Apollonius et Euclide étaient impliqués dans ladite généalogie, on a pu vouloir distinguer les deux traitements successifs qu'Hypsiclès rapportait à Apollonius en attribuant le premier à Euclide. La relation entre les deux auteurs devenait alors similaire à celle qu'Apollonius lui-même avait décrite à propos du célèbre problème à trois ou quatre droites dans la préface au premier livre des *Coniques* (4.13-16 Heiberg) — Apollonius corrigeant et complétant Euclide —, préface qui, comme nous l'avons dit, semble avoir joué un rôle dans l'élaboration de la version arabe de la "biographie" d'Euclide.

[16] Variantes ***M*** (τινα ἀπόδειξιν) / ***PBv*** (ἀπόδειξιν ὑγιῶς) / ***V*** (ἀπόδειξιν ὑγιῆ) : voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 89, note 12. Heiberg suit ***M***, les traducteurs arabes ***PBVv***. Dans la famille Téhéran 3586, la description du sujet du Livre d'Apollonius est plus détaillée lors de cette seconde occurrence que dans la première, contrairement au texte grec, à Rabat 1101 (et à *GC*).

(5)	et je me réjouis grandement de son approche du problème.	Et j'en ai tiré un immense profit à l'aide des choses que nous avons indiquées.	Je me suis alors immensément réjoui pour ce qu'il y avait comme perception des questions nobles.
(6)	Ainsi donc il est à portée de tout un chacun d'examiner l'écrit publié par Apollonius, puisqu'il a été mis en circulation[17].	Quant au livre qu'a réalisé Apollonius sur cela, il nous est possible à tous de l'étudier et ce parce que c'est un livre qui est parvenu à de nombreuses personnes.	L'intention d'Apollonius dans cela semble être universelle parce les <choses> s'entourent les unes aux autres comme les choses universelles.
(7)	Quant à ce que j'ai jugé devoir soigneusement rédiger ensuite sous forme de mémoire,	Quant à ce que nous avons réalisé, nous, après, et dans lequel nous avons expliqué avec soin tout ce qui se devait d'être expliqué,	Et j'ai pensé te confier ce que j'ai écrit sur cela après une fatigue intense.
(8)	j'ai décidé de te l'envoyer, d'abord parce qu'à cause de ton niveau général dans toutes les disciplines, et, surtout en géométrie, tu auras un jugement d'expert sur ce qui est va être dit,	nous avons pensé te le dédicacer puisque tu as la capacité de juger ce qui se dit et de l'assimiler à cause de ta prééminence dans toutes[18] les sciences mathématiques et en particulier dans la science de la géométrie,	Et notre opinion est que tu devrais l'enseigner en l'évoquant dans les choses où l'on a recours à l'expérience et ce à cause de ta prééminence dans les mathématiques et en particulier en géométrie[19].
(9)	ensuite, parce qu'à cause de tes liens avec mon père et de ta bienveillance à mon égard, tu prêteras une oreille favorable à mon travail.	et à cause de tes nombreux liens avec notre père et de ta bonne opinion sur nous. Cela te réjouira d'entendre ce que nous allons dire.	<Comme j'ai voulu> te détailler cela par affection et prévenance, à cause de ton amitié avec mon père et de ton jugement bienveillant sur nous,
(10)	Mais il est temps d'en finir avec le préambule et d'entamer avec ordre l'exposé lui-même.	Il est temps maintenant de conclure cette introduction et de nous engager dans ce que nous voulons évoquer	et ce au moment où nous commençons le livre que nous avons évoqué précédemment.

[17] Importante variante ***M*** / ***PBVv*** : voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 89, notes 14-17 et § 3, p. 106, note 259. La division, marquée par : « τὸ μὲν οὖν ὑπὸ … » / « τὸ δ᾽ ὑφ᾽ ἡμῶν », est donc déplacée ; par conséquent "φιλοπόνως" se rapporte ici au travail ultérieur d'Hypsiclès, pas à la réédition d'Apollonius, comme c'est le cas dans ***M***. En ce qui concerne le découpage des séquences (**6-7**), la tradition indirecte suit le texte de ***PBVv***. L'assertion (6) a été mal comprise et étrangement traduite dans la famille Téhéran 3586 ("κοινῇ" a été compris comme « de manière universelle » et "περιφέρεται" dans son sens de circumrévolution). Rabat 1101 et *GC* sont proches de ***PBVv.***

[18] Cf. Rabat 1101 et *GC* (tota scientia disciplinalium) *versus* la famille Téhéran 3586.

[19] Dans l'assertion (8), le ms Escorial 907 suit la famille Téhéran 3586, plutôt loin du grec.

<1> = [Proposition 1]

	GREC mss *PBVv*	Ms Rabat 1101	Famille du ms Téhéran 3586
(1)	La perpendiculaire menée à partir du centre d'un certain cercle sur le côté du pentagone inscrit dans ce même cercle est la moitié du rayon et du côté du décagone, les deux ensemble, ceux inscrits dans le même cercle[20].	Nous commençons par dire que la perpendiculaire sortant du centre d'un cercle vers le côté du pentagone qui est inscrit dans ce cercle, est égale à la moitié de la ligne sortant du centre de ce cercle vers la ligne qui l'entoure, avec la moitié du côté du décagone qui est inscrit dans ce cercle, si elles sont ajoutées.	Toute perpendiculaire sortant du centre d'un cercle vers le côté du pentagone qui est dans le cercle est comme la moitié du côté du décagone et la moitié du côté de l'hexagone <pris> ensemble, qui sont dans le cercle.
(2)	—	—	**Exemple de cela :**
(3)	Soit un cercle ΑΒΓ et, dans le cercle ΑΒΓ, un côté de pentagone équilatéral[21], ΒΓ, et que soit pris [le] centre du cercle, Δ, et que soit menée ΔΕ, perpendiculaire à ΒΓ,	Soit un cercle sur lequel il y a A, B, G. Soit, dans le cercle ABG, le côté d'un pentagone à côtés égaux, et c'est BG. Soit D le centre du cercle. De lui, sortons vers BG la perpendiculaire DE,	Le côté du pentagone du cercle ABG est la ligne BG; et la perpendiculaire sortant du centre du cercle vers le côté du pentagone, la ligne DE ; et D le centre du cercle.
(4)	et que les droites ΑΕ, ΕΖ, prolongent ΔΕ en alignement[22].	et nous sortons la ligne EZ dans le prolongement de la ligne DE.	Et nous sortons la ligne DE en alignement jusqu'au point Z de la circonférence du cercle,
(5)	—	—	et nous sortons la ligne GZ. L'arc GZ est la moitié de l'arc GB et l'arc GB est le cinquième du cercle. Donc l'arc GZ est le dixième du cercle. Et DEZ est la corde du sixième du cercle[23].
(6)	Je dis que ΔΕ est moitié du [côté] de l'hexagone[24] et de celui du décagone inscrits dans le même cercle.	Je dis que la ligne DE est égale à la moitié du côté de l'hexagone et du côté du décagone, qui sont inscrits dans ce cercle, s'ils sont ajoutés.	Je dis que la ligne DE est comme la moitié de la ligne DZ et la moitié de la ligne GZ <prises> ensemble.
(7)	—	**La preuve de cela :**	**Preuve de cela :**
(8)	En effet que ΔΓ, ΓΖ soient jointes, et que soit placée ΗΕ égale à ΕΖ, et qu'à partir du point Η jusqu'à Γ soit jointe ΗΓ.	Nous sortons les deux lignes DG et GZ. Et soit la ligne EH égale à la ligne EZ. Nous joignons les deux points H, G à l'aide de la ligne GH.	Nous sortons la ligne DG et nous séparons de la ligne DE la ligne DH égale à la ligne EZ et nous joignons GH.

[20] Variantes ***M*** (τε τοῦ ἑξαγώνου, πλευρᾶς) / ***PBVv*** (ἐκ τοῦ κέντρου, —) : voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 90, notes 25-26. Cf. Rabat 1101 avec ***PBVv***, la famille Téhéran 3586 avec ***M***. L'énoncé du compendium (399.27-28) est très court, avec « lateris exagonici » — l'ordre est (c_6, c_{10}) comme dans ***M*** —, mais sans la mention « … pris ensemble, ceux inscrits dans le même cercle ». *Ad. I, GC* suivent la famille Téhéran 3586.

[21] Variantes ***M*** (πενταγώνου) / ***PBVv*** (πενταγώνου ἰσοπλεύρου) : voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 90, note 28. Cf. Rabat 1101 avec ***PBVv***, la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC*, compendium avec ***M***.

[22] Variantes ***M*** (ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας τῆς ΔΕ εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΔΑ) / ***PBVv*** (ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας τῆς ΔΕ εὐθεῖα ἡ ΑΕΖ) / ***V*** (ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Ζ) : voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 90, notes 31-32. Cf. la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* et ***V***. Le compendium est davantage proche de ***PBv*** en mentionnant le diamètre *az*. Dans le ms. Escorial 907 : « *De lui, menons vers BG la perpendiculaire DE. Et nous la menons, en alignement, dans les deux directions vers les deux points A et Z de la circonférence du cercle* ».

[23] *Ad. I, GC* contiennent cette même justification de ce que l'arc GZ est un dixième du cercle et elles rappellent que DZ est la corde du sixième de cercle. Voir par exemple *GC,* 413.49-52. Ceci leur permet d'avoir un diorisme instancié. Ce n'est le cas ni du ms Escorial 907, ni du compendium.

[24] Le diorisme n'est donc pas tout à fait en accord avec l'énoncé dans ***PBVv*** (ainsi que dans Rabat 1101) puisqu'on parle désormais du côté de l'hexagone et non plus du rayon. Même chose dans la conclusion (30). Cf. scholie grecque 1.

(9)	Puis donc que la circonférence totale du cercle est quintuple de l'arc ΒΖΓ,	—	L'ensemble de la circonférence du cercle est cinq fois l'arc GZB
(10)	que d'une part l'arc ΑΓΖ est moitié de la circonférence totale du cercle, d'autre part ΖΓ moitié de ΒΖΓ, l'arc ΑΓΖ est donc aussi quintuple de l'arc ΖΓ.	Comme tout AGZ {est la moitié du cercle} et que la moitié de l'arc BZG est l'arc ZG, l'arc AGZ est cinq fois l'arc GZ.	et l'arc AGZ est la moitié du cercle et l'arc GZ est la moitié de l'arc GZB. Donc l'arc AGZ est cinq fois l'arc GZ.
(11)	ΑΓ est donc quatre fois ΖΓ.	Donc l'arc AG est quatre fois l'arc ZG.	Donc l'arc AG est quatre fois l'arc GZ.
(12)	Or comme ΑΓ [est] relativement à ΖΓ, ainsi [est] l'[angle] sous ΑΔΓ relativement à l'angle sous ΖΔΓ.	Et le rapport de l'arc AG à l'arc ZG est comme le rapport de l'angle ADG à l'angle ZDG.	—[25]
(13)	L'angle sous ΑΔΓ est donc quatre fois celui sous ΖΔΓ.	Donc l'angle ADG est quatre fois l'angle ZDG.	Donc l'angle ADG est quatre fois l'angle ZDG.
(14)	Or celui sous ΑΔΓ est deux fois celui sous ΕΖΓ.	Et l'angle ADG est deux fois l'angle EZG.	Et l'angle ADG est deux fois l'angle DZG
(15)	—	—	parce qu'il est extérieur au triangle DZG[26].
(16)	Celui sous ΕΖΓ est donc deux fois celui sous ΗΔΓ[27].	Donc l'angle EZG est aussi deux fois l'angle HDG.	L'angle DZG est donc deux fois l'angle ZDG.
(17)	—	—	Et ZE est comme EH, et l'angle HEG est droit. Donc la ligne GE est perpendiculaire à HZ. Donc la ligne GH est comme GZ[28].
(18)	Or il se trouve aussi que celui sous ΕΖΓ est égal à celui sous ΕΗΓ.	Et l'angle EZG est égal à l'angle EHG.	Et l'angle GHZ est comme l'angle HZG.
(19)	—	—	Donc l'angle GHZ est comme deux fois l'angle GDZ
(20)	—	—	et il est extérieur au triangle GDH[29].
(21)	Celui sous ΕΗΓ est donc aussi deux fois celui sous ΗΔΓ.	Donc l'angle EHG est deux fois l'angle HDG.	Donc l'angle DGH est comme l'angle GDH.
(22)	ΔΗ est donc égale à ΗΓ.	Donc la ligne DH est comme la ligne GH.	Donc les deux lignes DH, GH sont égales.
(23)	Mais ΗΓ est égale à ΖΓ.	Mais la ligne HG est comme la ligne ZG.	—[30]

[25] Cette proportion existe dans *GC*, 414.1, mais pas dans Escorial 907, ni *Ad. I*, ni dans le compendium
[26] *GC*, 414.30-31 possède la même *EPP* introduite par "quoniam", façon de se référer à I 32. *Ad. I* connaît la même justification, mais non postposée. Elle n'existe pas dans le compendium. Cf. les scholies grecques 11-12.
[27] Omis dans ***M***. À noter la différence dans la désignation des angles. Celles de *Ad. I, GC* sont comme dans la famille Téhéran 3586. Le compendium a *dzg* et *gdz* (ΔΖΓ et ΓΔΖ avec notre lettrage).
[28] Cf. les scholies grecques 14-15. Dans *Ad. I, GC* même justification complète. Voir par exemple *GC*, 414.32-34. Elle existe aussi partiellement dans le compendium (400.6-7), sans l'assertion « Donc la ligne GE est perpendiculaire à HZ ».
[29] L'explication supplémentaire (19)-(20) existe aussi dans Escorial 907, *Ad. I*, 374.21-22 et *GC*, 414.36-37 ; dans le compendium, 400.7-8, on trouve seulement (19). Cf. la scholie grecque 16.
[30] N'existe pas non plus dans *Ad. I*, ni dans le compendium, mais (23) existe dans Escorial 907 et *GC*, 414.40. Dans (21)-(23), Escorial 907 est comme Rabat 1101.

(24)	ΔH est donc aussi égale à ΓZ.	Donc la ligne DH est égale à la ligne ZG.	Donc la ligne DH est comme la ligne GZ[31].
(25)	Or HE est aussi égale à EZ.	Et la ligne HE est aussi comme la ligne EZ.	Et HE est comme EZ.
(26)	ΔE est donc égale à EZ, ZΓ, les deux ensemble.	Donc la ligne ED est égale aux deux lignes EZ, ZG si elles sont ajoutées.	Donc tout EZ, ZG est comme tout DH, HE.
(27)	Que EΔ soit ajouté de part et d'autre.	Et nous considérons la ligne DE commune.	
(28)	ΔZ, ZΓ, les deux ensemble est donc deux fois ΔE.	Donc les deux lignes DZ, ZG si elles sont ajoutées, sont comme deux fois la ligne DE.	Donc tout DZ, ZG est comme deux fois DE.
(29)	Et d'une part ΔZ est égale au côté de l'hexagone, d'autre part ZΓ est égale à celui du décagone;	Quant à la ligne DZ, elle est égale au côté de l'hexagone ; et la ligne ZG est le côté du décagone.	—
(30)	ΔE est donc la moitié du [côté] de l'hexagone et de celui du décagone, ceux qui sont inscrits dans le même cercle.	Donc la ligne DE est égale à la moitié du côté de l'hexagone et du côté du décagone qui sont inscrits dans ce cercle, s'ils sont ajoutés.	—[32]
(31)	—	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer[33].

[Ajout à la Proposition 1][34]

(32)	Il est alors évident à partir des théorèmes du treizième Livre, que la perpendiculaire menée à partir du centre du cercle sur le côté du triangle équilatéral est la moitié du rayon du cercle.	Et il a été démontré dans une proposition dans le treizième Livre que la perpendiculaire qui sort du centre du cercle vers le côté du triangle équilatéral qui est construit dans le cercle, est la moitié de la ligne qui sort du centre du cercle vers la ligne qui l'entoure.	Il a été montré dans le treizième Livre[35] que la perpendiculaire sortant du centre du cercle vers le côté du triangle du cercle est la moitié du segment sorti du centre du cercle vers sa circonférence.

[31] Jusqu'ici les textes de la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* étaient assez proches, avec de minuscules variantes mutuelles et quelques écarts un peu plus importants par rapport au grec et à Rabat 1101. À partir d'ici, *GC* diverge. *Ad. I* reste très proche de la famille Téhéran 3586. L'un et l'autre sont plutôt concis, tandis que la fin de la preuve principale de *GC* (414.40-51) est (inutilement) détaillée.

[32] Les versions de la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* sont privées des identifications des droites et de la conclusion particulière du grec. On ne peut même pas dire que ces versions soient en accord avec leurs diorismes instanciés, puisque celui-ci parlait de "moitiés", tandis que la fin de la preuve, inversant les relations, est, comme dans le grec et dans Rabat 1101, formulée en termes de "doubles". Le compendium n'a pas de conclusion particulière, est très concis [(25)-(26) sont absents], mais inclut les identifications des droites (400.9-10).

[33] Après (31), dans *GC* vient alors une preuve *aliter* partielle qualifiée de « plus brève » (414.53-415.3), quasiment identique à la fin de la preuve de Rabat 1101 (donc du grec), avec identifications et conclusion particulière. Il n'est pas dit qu'elle a été trouvée « *in alio libro* ». À la fin, elle possède « s'ils sont réunis » (cum coniunguntur, 415.2-3), comme Rabat 1101, qui manque en grec. En revanche, comme dans l'énoncé, elle inverse l'ordre (c_6, c_{10}).

[34] Dans la marge de ***V***, par une main récente, on a "Porisme" ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 91, note 39. Dans *Ad. I,* 375.27, il s'agit du début de XIV 2. Dans la famille Téhéran 3586 + *GC* et le compendium, il s'agit d'ajouts non qualifiés. Dans Rabat 1101, l'assertion est intercalée entre la conclusion particulière de XIV 1 et la clause « et c'est ce que nous voulions démontrer », ce qui en fait implicitement un porisme. Chez Campanus (493), l'assertion est introduite par "Corollaire".

[35] Dans les traductions arabo-latines on précise : « dans la huitième figure du treizième Livre », ce qui correspond à Heiberg XIII 12. Il n'y a ni numéro dans la famille Téhéran 3586, ni dans Rabat 1101.

(33)	—	—	Donc la perpendiculaire sortant du centre vers le côté du pentagone est égale à la perpendiculaire sortant du centre vers le côté du triangle et à la moitié du côté du décagone <pris> ensemble[36].
(34)	—[37]	Et c'est ce que nous voulions démontrer.	—

[Transition 1 → 2]

(1)	Le même cercle comprend à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère.	Le pentagone qui est l'une des surfaces du dodécaèdre et le triangle qui est l'une des surfaces de l'icosaèdre sont circonscrits par un même cercle, si les deux figures sont, ensemble, construites dans une même sphère,.	–[38]
(2)	Ceci est établi par Aristée, dans son écrit *La comparaison des 5 figures,* et, par ailleurs, Apollonius, dans la deuxième édition de sa *Comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre,* [a établi] que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi aussi est le dodécaèdre lui-même relativement à l'icosaèdre	C'est Aristée qui a évoqué cela dans son livre intitulé « *Le livre de la comparaison des cinq figures les unes aux autres* ». Et Apollonius a indiqué, dans la seconde version qu'on a rapportée de lui au sujet de la comparaison du dodécaèdre à l'icosaèdre : je dis que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du dodécaèdre lui-même à l'icosaèdre.	Et comme nous voulons démontrer ce qu'a indiqué Aristée dans le livre sur lequel est inscrit l'établissement des mesures des cinq figures, et Apollonius, dans la seconde version, sur la similitude entre le dodécaèdre et l'icosaèdre, puisqu'il dit que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre
(3)	à cause du fait que c'est la même perpendiculaire [qui est menée] à partir du centre de la sphère sur le pentagone du dodécaèdre et sur le triangle de l'icosaèdre.	Et ce parce que la perpendiculaire issue du centre de la sphère vers le pentagone du dodécaèdre est comme la perpendiculaire issue de lui vers le triangle de l'icosaèdre.	à cause du fait que la ligne tracée du centre du cercle du pentagone du dodécaèdre vers sa circonférence est comme <la ligne> tracée du centre du cercle du triangle de l'icosaèdre[39],
(4)	Et nous-mêmes devons aussi établir que le même cercle comprend à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre[40], ceux inscrits dans la même sphère, en ayant préalablement établi ceci.	Quant à nous, nous disons, à propos de cela, qu'il est circonscrit au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre qui sont inscrits dans une même sphère. Et je fais précéder cela par ce que je vais dire.	[41] il nous faut présenter avant cela ce qui rend ce propos exact. Nous disons :

[36] Même ajout dans le ms Escorial 907 [qui suivait pourtant Rabat 1101 dans (32)], *Ad. I, GC,* le compendium et Campanus (voir *Ad. I,* 375.29-31; *GC,* 415.15-18; Compendium, 400.12-14; Campanus, 493.37-44). Cet ajout à l'ajout est une sorte de Porisme à XIV 1. Entre ces deux assertions, *GC* intercale quelques justifications triviales (415.9-15), dont une *CNI* de XIV 1. Campanus se réfère aussi explicitement à XIV 1.

[37] Dans ***P*** : « ὅπερ ἔδει δεῖξαι ».

[38] Cet énoncé général existe chez *GC* (415.20-24), à cette place, mais pas dans la famille Téhéran 3586, ni dans le ms Escorial 907, ni dans *Ad. I,* ni dans le compendium, ni chez Campanus. De ce fait, puisque la séquence (34) de l'ajout à XIV **1** n'existe pas non plus dans ces versions, notre transition s'y enchaîne directement avec ledit ajout.

[39] Dans l'explication postposée (3) les variantes sont importantes. Voir l'analyse *supra,* III, § 1. Celle donnée dans le texte grec, Rabat 1101 et *GC* repose sur le fait que des cercles égaux d'une sphère sont équidistants du centre, ce qui est démontré, entre autres choses, dans Théodose, *Sphériques,* I. 6. Campanus en fait l'objet de son second "lemme" inséré avant (Camp.) XIV 10 (= XIV **5**), 508.526–509.543. Dans le même ordre d'idées, voir *supra,* la glose marginale dans le ms Téhéran 3586 (f°235^{v}), II, B, § 2, note 56 et § 4, note 338.

[40] La phrase « Et nous-mêmes … triangle de l'icosaèdre » est omise dans ***M*** ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 91, note 51.

<2> = [Lemme XIV. 1/2]

(1)	Si[42] un pentagone équilatéral est inscrit dans un cercle, le [carré] sur le côté du pentagone et celui sur la droite sous-tendue par deux côtés seront, quintuples de celui sur le rayon du cercle[43].	Si on construit dans un cercle un pentagone à côtés égaux, le carré du côté du pentagone et le carré résultant de la ligne droite qui sous-tend l'angle qu'entourent deux côtés du pentagone, s'ils sont ajoutés, sont cinq fois le carré de la moitié du diamètre du cercle[44].	Le carré du côté du pentagone et le carré du côté sous-tendant l'angle du pentagone inscrit dans le cercle sont, <pris> ensemble, comme cinq fois le carré de la moitié du diamètre du cercle.
(2)	—	—	**Exemple de cela[45] :**
(3)	Soit un cercle ΑΒΓ, et soit, dans le cercle ΑΒΓ, un côté de pentagone ΑΓ et que soit pris le centre du cercle Δ, et que soit [menée] ΔΖ, perpendiculaire à ΑΓ, et qu'elle soit prolongée vers B, E, et que soit jointe AB.	Soit un cercle sur lequel il y a A, B, G. Que l'on y construise le côté d'un pentagone, et c'est AG. Que le centre du cercle soit D. Nous sortons de lui vers la ligne AG la perpendiculaire DZ et nous la prolongeons vers les deux points B et E, et nous joignons la ligne AB.	<Dans> le cercle ABG, on a sorti le côté d'un pentagone, et c'est la ligne BG. Et nous sortons le diamètre ADEZ <qui> coupe BG en deux moitiés au point E, et nous joignons G, Z[46].

[41] Comme la famille Téhéran 3586, le ms Escorial 907, *Ad. I* (375.39-40) et le compendium (400.21-22) indiquent seulement qu'il est nécessaire de démontrer au préalable ce qui suit. Cela tient à ce que leur *EPP* énonçant le résultat de XIV **2**, il est inutile de le rappeler. Plus haut (voir [Vitrac-Djebbar, 2011], I, § 8, p. 75, note 84), nous avons suggéré que la cheville de transition (4), introduisant XIV **1/2** + **2**, appartenait plutôt à l'éditeur du Livre XIV qu'à Hypsiclès. Nous avons ici un indice supplémentaire que le texte a été retravaillé. Qu'en est-il des précieuses informations historiques (2) ? Il faut remarquer que la tradition indirecte médiévale — même la composante sans la préface de Hypsiclès — possède une telle cheville de transition (à la seule exception de la recension d'Ibn Sīnā), plus sommaire que celle du grec, mais de type livresque et qui mentionne Aristée, Apollonius et leurs écrits respectifs. Au demeurant, même si ces informations ne sont pas de la main d'Hypsiclès, mais, par exemple, de celle de l'éditeur du Livre XIV, cela ne préjuge en rien de leur véracité historique.

[42] La forme de l'énoncé est conditionnelle dans le grec, Rabat 1101; elle est définie dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* et le compendium. Pour cet énoncé, Escorial 907 et *GC,* 415.43-46 suivent fidèlement Rabat 1101.

[43] Variantes ***M* / *PBVv* :**

(*i*) la précision « τε καὶ ἰσογώνιον » existe dans ***M***, mais est omise dans ***PBVv*** (ainsi que Rabat 1101 et *GC*) ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 92, note 53. C'est la double précision « à la fois équilatéral et équiangle » qui est omise dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* et le compendium.

(*ii*) ***M*** (être, en puissance, quintuple de …) / ***PBVv*** (les carrés sur … sont quintuples de celui sur …) ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 92, note 54 et § 3, p. 108, note 272. La formulation est en accord avec celle du diorisme. En ce qui concerne la formule en terme de "puissance", toutes les versions médiévales sont en accord avec les mss ***PBVv***. Cette variante « puissance / carrés sur … » en redouble une autre :

(*iii*) l'inversion de l'ordre : ***M*** (d_5, c_5) / ***PBVv*** (c_5, d_5), ainsi que toutes les versions médiévales.

[44] Dans Rabat 1101, Escorial 907, la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* on dit "moitié du diamètre" plutôt que "rayon" (grec), dans le compendium : "côté de l'hexagone", ce qui ne correspond pas à sa propre conclusion ("moitié du diamètre") ! Pour désigner l'autre droite, on trouve trois formules : « la droite sous-tendue par deux côtés » (grec), « la droite (ou le côté) sous-tendant l'angle » (Rabat 1101, Escorial 907, famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC*), « la corde sous-tendant l'angle » (compendium).

[45] Les chevilles (2) et (6) existent dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* pas dans Rabat 1101, ni dans Escorial 907, ni dans le compendium.

[46] Il y a deux lettrages distincts, d'un côté celui du grec, Rabat 1101 et Escorial 907 (dans ces deux-là, manque le centre D), de l'autre la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* ainsi que le compendium : A/G, B/A, G/B, E/Z, Z/E (h in *Ad. I*). Il y a aussi une variante de construction entre les mêmes groupes : dans le premier on mène une perpendiculaire que l'on prolonge ; dans l'autre on mène un diamètre et on joint GZ, ce qui est nécessaire pour l'insertion de (4), mais on omet d'expliciter la jonction de la droite AG (AB dans le lettrage grec, *i.e.* d_5), sauf *GC* (416.3-4).

(4)	—	—	La ligne GZ est la corde d'un dixième du cercle. Donc l'arc GZ est l'arc d'un dixième de cercle. Il reste l'arc AG <qui est> les deux cinquièmes du cercle. Donc, la ligne AG sous-tend l'angle du pentagone[47].
(5)	Je dis que les carrés sur BA, AΓ sont quintuples du carré sur ΔE.	Je dis que les deux carrés résultant des deux lignes BA et AG, s'ils sont ajoutés, c'est cinq fois le carré résultant de DE.	Je dis que le carré de AG et le carré de GB <pris> ensemble, sont cinq fois le carré de DB.
(6)	—	—	**Preuve de cela :**
(7)	Que soit jointe AE ; donc AE est le [côté] du décagone.	Nous sortons la ligne AE. La ligne AE sera le côté du décagone.	—
(8)	Et puisque BE est deux fois EΔ, le [carré] sur BE est donc quadruple de celui sur EΔ.	Et puisque la ligne BE est deux fois la ligne ED, le carré de BA sera quatre fois le carré de DE.	DZ est la moitié de AZ[48]. Donc, le carré de AZ est quatre fois le carré de DZ.
(9)	Or celui sur BE est égal à ceux sur BA, AE.	Et le carré résultant de la ligne BE est égal aux deux carrés de AB et de AE.	Et le carré de AZ est comme le carré de AG et le carré de GZ, <pris> ensemble,
(10)	—	—	parce que l'angle AGZ est droit[49].
(11)	Ceux sur BA, AE sont donc quadruples de celui sur ΔE.	Donc, les deux carrés résultant des deux lignes BA et AE sont quatre fois le carré de ED.	Donc les deux carrés AG, GZ, <pris> ensemble, sont quatre fois le carré de DZ[50].
(12)	—	—	Que le carré de DZ soit commun.
(13)	—	—	Le carré de AZ et le carré de DZ, <pris> ensemble, sont cinq fois le carré de DZ.
(14)	Ceux sur BA, AE, EΔ sont donc quintuples de celui sur ΔE.	Et, pour cela, les carrés résultants des lignes BA, AE et ED sont cinq fois le carré de DE.	Et le carré de AG et le carré de GZ et le carré de DZ, ensemble, sont cinq fois le carré de DZ.
(15)	Or à ceux sur ΔE, EA est égal celui sur AΓ.	Et le carré résultant de AG est égal aux deux carrés de DE et EA.	Or la ligne GB, qui est la corde du cinquième <du cercle>, est en puissance de GZ, qui est la corde du dixième, et de DZ, qui est la corde du sixième, <prises> ensemble[51].
(16)	—	—	Donc, le carré de AG et le carré de GB, <pris> ensemble, sont comme le carré de AG, le carré de GZ et le carré de DZ, <pris> ensemble[52].

[47] Comme dans XIV **1**, la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* ainsi que le compendium, mais ni Rabat 1101, ni Escorial 907, incluent avant le diorisme une identification des droites *gz, ag* (EA, AB dans notre lettrage) en termes de *cordes* sous-tendant certaines portions spécifiées du cercle. Cela leur permet d'éliminer (7). La variante de construction, l'existence ou l'inexistence de (4) et (7) définissent les deux mêmes groupes de textes.

[48] Comme le grec et Rabat 1101, malgré sa parenté dans cette Proposition avec la famille Téhéran 3586, le compendium dit : « *az* est le double de *dz* », et non « *dz* est la moitié de *az* », comme *Ad. I, GC*.

[49] *GC* possède aussi cette *EPP* triviale ; elle est entre crochets dans *Ad. I* ; elle n'existe pas dans le compendium. On la trouve dans la Proposition 15 du texte hébraïque analogue au Livre XV d'al-Maghribī, mais pas chez al-Maghribī lui-même ! Cf. la scholie grecque 21.

[50] La substitution n'existe pas dans le compendium; l'insertion qui suit (12) se trouve seulement dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC*.

[51] On retrouve la variante « puissance / carrés sur … » (famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* compendium \ Grec, Rabat 1101, Escorial 907). L'identification des droites impliquées dans XIII. 10 est faite dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* mais pas dans Rabat 1101, ni dans Escorial 907, ni dans le compendium. Cf. la scholie grecque 22.

[52] Substitution triviale et rappel dans Téhéran 3586 et *GC,* mais ni dans Escorial 907, ni dans *Ad. I,* ni dans le compendium. Dans la portion (14)-(18), Escorial 907 suit Rabat 1101.

(17)	Ceux sur AB, AΓ sont donc quintuples de celui sur ΔE.	Donc, les deux carrés de BA et AG, <pris> ensemble, sont cinq fois le carré de DE.	Donc, les deux carrés de AG, qui sous-tend l'angle du pentagone, et de GB, qui est la corde du cinquième, <pris> ensemble, sont cinq fois le carré de DZ[53].
(18)	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer.	Et c'est ce que nous voulions démontrer[54].
(19)	—	—	Et ce qui sous-tend l'angle du pentagone du dodécaèdre qui est <inscrit> dans la sphère, c'est le côté du cube qui est <inscrit> dans la sphère. Il a donc été démontré que le carré du côté du cube qui est <inscrit> dans la sphère et le carré du côté du pentagone du dodécaèdre qui est <inscrit> dans la sphère, <pris> ensemble, sont cinq fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre qui est <inscrit> dans la sphère[55].

<3> = [Proposition 2]

(1)	Ceci étant démontré, il faut démontrer que le même cercle comprend à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère.	Ceci ayant été démontré[56], démontrons que le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, qui sont inscrits dans une même sphère, sont circonscrits par un même cercle.	Nous voulons démontrer que le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, qui sont inscrits dans une même sphère, sont entourés par un même cercle.
(2)	—	—	**Exemple de cela :**
(3)	Que soit proposé le diamètre de la sphère, AB, et, que dans cette même sphère[57], soient inscrits à la fois un dodécaèdre et un icosaèdre, et soit d'une part ΓΔEZH, un pentagone du dodécaèdre, d'autre part KΛΘ, un triangle de l'icosaèdre.	Nous considérons le diamètre d'une sphère quelconque, et c'est AB. Et nous traçons dans cette sphère un dodécaèdre et un icosaèdre. Soit GDEZH le pentagone du dodécaèdre et KLT le triangle de l'icosaèdre.	On suppose que le diamètre de la sphère est AB. On y inscrit le dodécaèdre et l'icosaèdre. Que GDEWZ soit le pentagone du dodécaèdre et TYK le triangle de l'icosaèdre[58].

[53] L'identification des droites existe aussi dans *Ad. I,* mais ni dans *GC,* ni dans le compendium. Leurs conclusions sont différentes, plus proches cependant de celle de Rabat 1101 ; (cf. *supra,* note 44).

[54] La clause CQVD existe ici dans *GC,* ainsi que dans *Ad. I* — mais après (19) — ; elle n'existe pas dans le compendium.

[55] Cet ajout existe aussi dans le ms Escorial 907, repris à la famille Téhéran 3586. Il formule à nouveau le résultat, un peu différemment en rappelant que, (d'après XIII 17, réf. livresque explicite dans *GC,* mais pas dans la famille Téhéran 3586), la droite *ag* (resp. BA dans notre lettrage) est le côté du cube inscrit dans la sphère qui contient le dodécaèdre (la même chose sera rappelée au début de la preuve grecque de XIV **2** [voir assertion (**5**)], mais pas dans celles des versions médiévales). La version de *GC* (416.31-43) est particulièrement détaillée. Cf. *Ad. I,* 376.62-66 et Compendium, 401.1-4. Dans la version de Campanus, cet ajout est présenté comme le corollaire à la Proposition XIV 4 (= XIV **1/2**), 496.163–497.171 Busard.

[56] Cette cheville de transition existe aussi dans le compendium (401.5), mais ni dans *Ad. I,* ni dans *GC*.

[57] Variantes ***M*** (εἰς αὐτὴν) / ***PBVv*** (εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν) ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 93, note 63. Le compendium est comme ***PBVv***.

[58] Il y a donc des variantes de lettrage entre d'une part le grec, Rabat 1101, Escorial 907 et le compendium, d'autre part la famille Téhéran 3586 et *Ad. I.* Celui de *GC* relève de ce second groupe, mais le triangle est désigné par *bkt,* au lieu de *tky.* Le même problème se produit dans le *texte* de Téhéran 3586. Par conséquent la lettre *b* est utilisée pour désigner deux points différents !

(4)	Je dis que les rayons des cercles qui leur sont circonscrits sont égaux, autrement dit, que le même cercle comprend le pentagone ΓΔΕΖΗ et le triangle ΚΛΘ.	Je dis que les deux lignes sortant des centres des deux cercles qui leur sont circonscrits, vers leurs deux circonférences, sont égales.	Je dis que le cercle circonscrit au pentagone GDEWZ est égal au cercle circonscrit au triangle TYK[59].
(5)	—	**Sa preuve :**	**Preuve de cela :**
(6)	—	Nous traçons un seul cercle pour le pentagone GDEZH et le triangle KLT[60].	—
(7)	Que soit jointe ΔΗ.	Sortons la ligne HD	Nous joignons DZ
(8)	ΔΗ est donc le côté du cube.	—	—[61]
(9)	Que soit proposée une certaine droite MN de sorte que le [carré] sur AB soit quintuple de celui sur MN.	et nous traçons une ligne droite <telle que> le carré résultant de AB soit cinq fois le carré résultant d'elle, et c'est MN.	et nous traçons la ligne LM rectiligne et nous supposons que son carré est le cinquième[62] du carré de la ligne AB.
(10)	Or il se trouve aussi que le diamètre de la sphère est quintuple, en puissance, du rayon du cercle sur lequel l'icosaèdre a été décrit.	Le diamètre de la sphère est aussi, en puissance, cinq fois la moitié du diamètre du cercle de l'icosaèdre.	Il a été démontré, dans le *treizième Livre*[63], que le carré du demi-diamètre du cercle dont le côté du pentagone est le côté du triangle de l'icosaèdre, inscrit dans la sphère, est comme le cinquième du carré du diamètre de la sphère.
(11)	MN est donc égale au rayon du cercle sur lequel l'icosaèdre a été décrit[64].	Donc la ligne MN est la moitié du diamètre du cercle de l'icosaèdre.	Donc la ligne LM est la moitié du diamètre du cercle dont le côté du pentagone est le côté du triangle de l'icosaèdre.
(12)	Que MN soit coupée en extrême et moyenne raison selon le point Ξ,	Divisons la ligne MN selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes au point S.	Nous divisons la ligne LM selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes.
(13)	et que son plus grand segment soit ΜΞ.	Et soit MS sa partie la plus grande.	La partie la plus grande sera LN et la plus petite MN[65].

[59] Les diorismes du ms Escorial 907 et du compendium (401.10-13) sont très proches de celui du texte grec (égalité des rayons ; identité du cercle). Celui de Campanus dit (comme dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC*) que le cercle contenant le pentagone *gdeuz* est égal au cercle contenant le triangle *tbk,* ce qui n'est pas en accord avec l'énoncé dans cette famille (identité du cercle).

[60] Le texte de Rabat 1101 ici est défectueux car on a une pétition de principe : c'est ce qu'il faut démontrer. La comparaison avec Escorial 907 montre que c'est la deuxième partie du diorisme du grec, littéralement « et cela est [parce] que le même cercle comprend le pentagone ΓΔΕΖΗ et le triangle ΚΛΘ » (que l'on trouve aussi dans le compendium, voir note précédente) qui a été séparée de la première (« Je dis que … ») et altérée peut-être à cause de l'insertion prématurée de la cheville « Sa preuve est … ».

[61] Cette assertion (plus que laconique, on attend « ὁ τοῦ κύβου ἄρα ἐστιν ἡ ΔΗ) concernant ΔΗ n'existe pas dans la tradition indirecte à cet endroit. Elle sera introduite plus loin dans les 3 versions arabo-latines (et justifiée dans *GC*), mais pas dans l'arabe.

[62] À noter (ici et dans (10)) l'opposition : « quintuple, cinq fois \ cinquième » entre d'une part, le grec, Rabat 1101 et le compendium, d'autre part, la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* Escorial 907.

[63] Même référence livresque explicite au Livre XIII dans *Ad. I,* 376.76-79 et *GC,* 418.1-5, mais pas dans le compendium, à cet endroit très proche du texte grec. La substitution du "cinquième" au "quintuple" dans la référence à XIII 16 oblige à inverser l'ordre d'énonciation. On retrouve l'opposition : « en puissance \ les carrés sur … » entre le grec et Rabat 1101 d'une part, la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* et le compendium d'autre part.

[64] L'assertion (11) est omise dans les mss ***BVv*** ; dans ***P,*** au lieu de « ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου », on a « ἐστιν ὁ τοῦ κύβου τοῦ » ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 93, note 68. Dans le compendium, on a : « MN est donc égale à la moitié du diamètre de ce cercle ». La tradition médiévale substitue « moitié du diamètre » à « rayon ».

[65] L'identification des *deux* segments se trouve aussi dans *GC,* mais ni dans Escorial 907, ni dans *Ad. I,* ni dans le compendium.

(14)	—	—	La ligne LM est donc la corde du sixième du cercle[66];
(15)	MΞ est donc le côté du décagone[67].	—	et LN la corde de son dixième[68].
(16)	Et puisque le [carré] sur AB est quintuple de celui sur MN, que celui sur AB est triple de celui sur ΔH, trois carrés sur ΔH sont donc égaux à cinq sur MN.	Puisque le carré de AB est cinq fois le carré de MN — et c'est ainsi que nous l'avons supposé — et que le carré de AB est trois fois le carré de DH, alors trois fois le carré de DH est égal à cinq fois le carré de MN.	Et le carré de la ligne AB est trois fois le carré de DZ, parce que DZ est le côté du cube de la sphère tracé sur le diamètre AB. Donc, trois fois le carré de DZ est égal à cinq fois le carré de LM[69].
(17)	—[70]	—	[71]Et il a été démontré, dans le treizième Livre, que la ligne qui sous-tend l'angle du pentagone, si on en sépare le côté du pentagone, sera divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes. Et la partie la plus grande est le côté du pentagone[72].
(18)	—	—	Donc, le rapport de la ligne GD à la ligne DZ est comme le rapport de la ligne LN à la ligne LM[73].

[66] *GC* ajoute une *EPP* triviale : « puisqu'elle est la moitié de son diamètre ». C'est également ce que rappelle le début de la scholie grecque 25.

[67] L'assertion « δεκαγώνου ἄρα ἡ MΞ » est omise dans ***M*** ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 93, note 70 et § 3, p. 109, note 279. Dans *GC* seulement, il y a une *CNI* de *GC* XIV 3 (418.12-14), puis un rappel explicite justifiant que DG (avec notre lettrage) est le côté du cube (418.15-17) puis un rappel livresque du Livre XIII, avec *CNI* de Heiberg XIII.15c (418.17-20). Escorial 907 suit la famille Téhéran 3586. *Ad. I* et le compendium ont une indication du même genre, nettement plus brève, postposée, insérée un peu plus loin.

[68] La formulation du compendium est différente (mn = côté de l'hexagone, nc = côté du décagone).

[69] Comme dans la famille Téhéran 3586, dans Escorial 907, *Ad. I,* mais aussi le compendium, il manque le rappel : « Puisque le carré de AB est cinq fois le carré de MN ». Ces versions ont aussi une courte *EPP* (*Ad. I,* 376.84, compendium, 401.19) : « car ΔH est le côté du cube inscrit dans la sphère » (avec notre lettrage) qui n'existe ni dans le grec, ni dans Rabat 1101 pour justifier « $AB^2 = 3DZ^2$ ». Aucune assertion ne manque dans *GC* qui présente le rappel de l'égalité « $AB^2 = 5MN^2$ » comme un rappel de démonstration (418.21) : « Sed iam fuit ostensum … ».

[70] Dans cette portion, le texte grec transmis (ainsi que celui de la version Rabat 1101) présente ici deux problèmes : une très probable lacune et un usage implicite du lemme SEMR appliqué aux droites ΔH et MN» ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, note complémentaire 5.2, pp. 146-149.

[71] À cet endroit, la preuve de *GC* diverge de celle de la famille Téhéran 3586 et de *Ad. I.* Elle présente un long développement (418.24-47) visant (comme dans *GC* XIV 3 = XIII 9bis ; voir *infra,* Tableau 6, note 215) à se dispenser du recours au Lemme SEMR, développement dans lequel (avec le lettrage grec) :

(***i***) on sectionne ΔH selon le rapport MΞ · ΞN
(***ii***) on montre qu'il s'agit d'une section en extrême et moyenne raison
(***iii***) puis on inclut une référence explicite au Livre XIII et une *CNI* de Heiberg XIII 8 [cf. (17) et la scholie grecque 29] pour
(***iv***) justifier que le plus grand segment de ΔH est égal à ΔΓ.
(***v***) établir (18) : ΔΓ · ΔH ∙∶ MΞ · MN, grâce à (***i***).

[72] Le ms Escorial 907 et *Ad. I,* 377.89-90 suivent la famille Téhéran 3586. Dans le compendium (401.20-402.2) on a une *CNI* de Heiberg XIII 17 Porisme (et non de XIII 8), sans référence livresque explicite, et la même proportion que dans *Ad. I* mais inversée (MN · MΞ ∙∶ ΔH · ΔΓ). Cf. les scholies grecques 28-29 (renvoi à XIII 8), le début de la scholie 30 et la fin de la scholie 31 (renvoi à XIII 17 Porisme).

[73] En utilisant le Lemme SEMR. Dans le ms Téhéran 3586, une glose marginale (f° 236^{v}) en détaille l'utilisation ; voir *supra,* II, B, § 2, note 74 et § 4, note 340. Malgré des variantes d'expression, elle est substantiellement comparable à la scholie grecque 31.

(19)	Or comme trois de ceux sur ΔΗ [sont] relativement à trois de ceux sur ΓΗ, ainsi sont cinq de ceux sur ΜΝ relativement à cinq de ceux sur ΜΞ.	Et le rapport de trois fois le carré de DH à trois fois le carré de GH est comme le rapport de cinq fois le carré de MN à cinq fois le carré de MS.	—[74]
(20)	—[75]	—	Donc ce qui résulte de cinq fois le carré de LM et de cinq fois le carré de LN, <pris> ensemble, est comme ce qui résulte de trois fois le carré de DZ et trois fois le carré de GD, <pris> ensemble.
(21)	—[76]	Et cinq fois le carré de MN avec cinq fois le carré de MS, c'est comme cinq fois le carré de KL.	Et le côté YT est en puissance du côté LM et du côté LN.
(22)	Cinq de ceux sur ΚΛ sont donc égaux à trois de ceux sur ΓΗ et trois de ceux sur ΔΗ.	Donc cinq fois le carré de KL c'est trois fois le carré de GH <avec le carré sur DH>.	Donc cinq fois le carré de YT est égal à trois fois le carré de DZ et à trois fois le carré de GD, <pris> ensemble.
(23)	—	—	Et il a été démontré, dans le *treizième Livre*, que la corde du triangle est en puissance de trois fois la moitié du diamètre. Donc, le carré de la ligne KT est trois fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au triangle YTK[77].
(24)	Mais d'une part cinq de ceux sur ΚΛ sont égaux à quinze de ceux sur le rayon du cercle circonscrit autour du triangle ΘΚΛ,	Mais cinq fois le carré de KL est égal à quinze fois le carré résultant de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au triangle KLT.	Donc, cinq fois le carré de KT est égal à quinze fois le carré de la moitié du diamètre circonscrit au triangle YTK.
(25)	d'autre part trois de ceux sur ΔΗ et trois de ceux sur ΓΗ sont égaux à 15 de ceux sur le rayon du cercle circonscrit autour de ΓΔΕΖΗ.	Et trois fois le carré de DH avec trois fois le carré de GH est égal à quinze fois le carré résultant de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au pentagone GDEZH.	Et nous avons démontré, dans ce *Livre*, que le carré du côté du pentagone et le carré du côté qui sous-tend l'angle du pentagone, <pris> ensemble, sont cinq fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au pentagone.

[74] Dans *GC* (418.48-56), suit une série de proportions élémentaires pour aboutir à la proportion (**19**) du texte grec, mais permutée : (***vi***) 3T(ΔΗ) : 5T(ΜΝ) :: 3T(ΓΗ) : 5T(ΜΞ), puis rappel de 3T(ΔΗ) = 5T(ΜΝ) pour en déduire : 3T(ΓΗ) = 5T(ΜΞ) et enfin, par addition : 3T(ΓΗ) + 3T(ΔΗ) = 5T(ΜΞ) + 5T(ΜΝ) (20). Cf. la scholie grecque 33. Escorial 907 et *Ad. I* (377.90-92), comme la famille Téhéran 3586, passent directement de la proportion ΓΗ · ΓΔ ·: ΞΜ · ΜΝ à l'égalité (20) présentée dans l'ordre inverse. Le compendium rappelle l'égalité 3T(ΔΗ) = 5T(ΜΝ) et en déduit directement (20).

[75] Petite lacune du texte grec comblée par la tradition indirecte ?

[76] Dans les mss ***PBVv***, l'assertion (21) de ***M*** et Rabat 1101 — une sorte de rappel instancié de XIII. 10 — a disparu ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 93, note 73. Elle manque aussi dans Téhéran 3586, mais elle existe dans les mss Uppsala 321, Téhéran 200 et Escorial 907, chez *Ad.* I (377.92) et dans le compendium (402.4). Pour sa part *GC* contient une longue série de rappels explicites (418.56-419.17) dont un renvoi livresque au Livre XIII avec *CNI* de Heiberg XIII 10 (l. 1-3). Cf. la scholie grecque 33. On retrouve l'opposition : « les carrés sur … \ en puissance » entre ***M*** et Rabat 1101 d'une part, la famille Téhéran 3586 (mais lacune dans Téhéran 3586 lui-même !), Escorial 907, *Ad. I, GC* et le compendium d'autre part.

[77] La référence livresque explicite au Livre XIII, avec *CNI* de XIII 12 existe aussi dans le ms Escorial 907, *Ad. I,* 377.94-95 et *GC,* 419.11-15 mais ni dans le grec, ni dans Rabat 1101, ni dans le compendium. Même chose pour l'instanciation de la deuxième partie de (23). Cf. la scholie grecque 34.

(26)	Il a en effet été préalablement démontré que le carré sur ΔH avec celui sur ΓH sont quintuples de celui sur le rayon du cercle circonscrit autour du pentagone ΓΔEZH.	Et cela parce qu'il a été démontré, dans ce qui a précédé, que le carré de DH avec le carré de GH, c'est cinq fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au pentagone GDEZH.	Donc, trois fois le carré de DZ et trois fois le carré de GD sont quinze fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au pentagone GDEWZ[78].
(27)	Quinze carrés sur le rayon [de l'un des cercles] sont donc égaux à quinze carrés sur le rayon [de l'autre cercle] ;	Donc quinze fois le carré résultant de la moitié du diamètre de l'un des deux cercles est égal à quinze fois le carré résultant de la moitié du diamètre de l'autre cercle.	Donc quinze fois le carré de la moitié du diamètre du cercle circonscrit au triangle KTY[79] est égal à quinze fois le carré du demi-diamètre du cercle circonscrit au pentagone GDEWZ.
(28)	un des [carrés] sur le rayon [de l'un] est donc égal à un des [carrés] sur le rayon [de l'autre][80] ;	Donc le carré de la moitié de l'un des deux diamètres est égal au carré de la moitié de l'autre diamètre.	—
(29)	le diamètre est donc égal au diamètre.	Le diamètre est donc égal au diamètre[81].	Donc, la moitié du diamètre du cercle GDEWZ est comme la moitié du diamètre du cercle YTK.
(30)	Le même cercle comprend donc à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère	Donc, le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, qui sont inscrits dans une même sphère, sont circonscrits par un même cercle.	Les deux cercles sont donc égaux[82].
(31)	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer.	Et c'est ce que nous voulions démontrer.

<4> = [Lemme XIV. 2/3 < a >]

(1)[83]	Si l'on a un pentagone équilatéral et équiangle et, autour de celui-ci, un cercle et qu'à partir du centre soit menée une perpendiculaire sur un côté, trente fois le [rectangle] contenu par l'un des côtés et la perpendiculaire est égal à la surface du dodécaèdre.	Si <on a> un pentagone à côtés et à angles égaux et qu'il est circonscrit par un cercle et que l'on mène de son centre une perpendiculaire vers l'un des côtés du pentagone, <alors> trente fois la surface entourée par l'un des côtés du pentagone et la perpendiculaire est égale à la surface du dodécaèdre.	La surface[84] qui est égale à trente fois le rectangle résultant du produit de la perpendiculaire sortie du centre du cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre vers le côté du pentagone, par le côté du pentagone, est égale à la surface du dodécaèdre.

[78] La référence livresque interne explicite avec *CNI* de XIV **1/2** existe aussi dans *Ad. I,* 377.99-101 et *GC,* 419.17-22. Dans le texte grec, le rappel est également explicite, mais sous forme de citation instanciée *postposée* de XIV **1/2**. Il y a donc inversion de (25-26) entre traditions directe et indirecte. Dans le ms Escorial 907, on a bien (25), mais pas (26). Il n'y a aucune justification ajoutée dans le compendium.

[79] La séquence (27) est non instanciée dans le grec, dans Rabat 1101 et dans le compendium, instanciée dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* et Escorial 907. Comme d'habitude la tradition médiévale substitue « moitié du diamètre » au « rayon » du grec.

[80] Le modèle du compendium, 402.10-11 possédait une assertion du genre de celle des mss ***PBVv*** (qui manque dans ***M*** ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 94, note 84) et de Rabat 1101. *Ad. I,* 377.103-107 suit la famille de Téhéran 3586 dans (27)-(31). *GC,* 419.25-35 intercale toute une série d'égalités et de rappels inutiles.

[81] Le texte du manuscrit Rabat 1101 dans (28)-(29) : « Donc le carré de chacun des *deux* diamètres est égal au carré de la moitié de l'autre diamètre. Le diamètre est donc égal aux deux diamètres » est fautif (confusion entre "moitié" et "deux"). Dans le ms Escorial 907, on lit : « le diamètre est donc égal au diamètre ».

[82] Même formulation dans *Ad. I* et *GC.* Même absence de conclusion générale dans Escorial 907, *Ad. I,* mais elle existe dans *GC,* 419.38-40, et dans le compendium, 402.11-12, qui n'a pas (29).

[83] Les variantes dans cet énoncé sont importantes : « forme conditionnelle / forme définie » (Grec + Rabat 1101 / Famille Téhéran 3586 + *Ad.I* + *GC* + compendium) ; « formulation géométrique (rectangle ou surface contenu(e) par …) / formulation multiplicative (le produit de …) » (Grec + Rabat 1101 + compendium / Famille Téhéran 3586 + *Ad.I* + *GC*), même variante dans (4), (7), (8), (12) ; ordre (c_5, r_5) / (r_5, c_5) (Grec + Rabat 1101 + compendium / Famille Téhéran 3586 + *Ad.I* + *GC*) ; précision « équilatéral et équiangle » / « équilatéral » /

(2)	—	—	**Exemple de cela**[85] **:**
(3)	Soit un pentagone équilatéral et équiangle ΑΒΓΔΕ et autour du pentagone un cercle et que soit pris le centre, Ζ, et qu'à partir de Ζ soit menée ΖΗ, perpendiculaire à ΓΔ.	Soit ABGDE le pentagone à côtés et à angles égaux. Traçons sur ce pentagone un cercle de centre le point Z et sortons du point Z vers le côté GD la perpendiculaire ZH.	Le cercle ABGDE est circonscrit au pentagone du dodécaèdre, et c'est le pentagone ABGDE. Le centre du cercle est le point Z et on a sorti, à partir de lui, une perpendiculaire jusqu'au point T de la ligne GD.
(4)	Je dis que trente fois le [rectangle] contenu par ΓΔ, ΖΗ est égal à douze pentagones ΑΒΓΔΕ.	Je dis que trente fois la surface entourée par les deux lignes GD et ZH est égale à douze fois le pentagone ABGDE.	Je dis que trente fois GD par TZ est égal à la surface du dodécaèdre[86] dont le pentagone est le pentagone ABGDE.
(5)	—	—	**Preuve de cela :**
(6)	Que ΓΖ, ΖΔ soient jointes.	Sortons les deux lignes GZ et ZD.	—[87]
(7)	Et puisque le [rectangle] contenu par ΓΔ, ΖΗ est double du triangle ΓΔΖ,	Puisque la surface entourée par les deux lignes GD et HZ est deux fois le triangle GDZ,	GD par TZ est deux fois le triangle ZGD.
(8)	cinq fois le [rectangle] contenu par ΓΔ, ΖΗ est donc égal [à] dix triangles.	cinq fois la surface entourée par les deux lignes GD et ZH est comme dix fois le triangle GDZ.	Donc la ligne GD par la ligne ZT est le cinquième du double du pentagone ABGDE[88].
(9)	Or dix triangles sont deux pentagones[89],	Et dix fois le triangle GDZ est comme deux fois le pentagone.	—
(10)	et tout ceci, six fois. Trente fois le [rectangle] contenu par ΓΔ, ΖΗ est donc égal à douze pentagones.	Et si cela est multiplié par six, <alors> trente fois la surface entourée par les deux lignes GD et ZH sera égale à douze pentagones.	—[90]
(11)	Or douze pentagones c'est la surface du dodécaèdre[91].	Et douze pentagones c'est la surface de la figure entourée par douze bases.	Et la surface du dodécaèdre est douze fois ABGDE.

« pentagone du dodécaèdre » : (Grec + Rabat 1101 / compendium / Famille Téhéran 3586 + *Ad.I* + *GC*), même variante dans (3). Un aspect paradoxal de l'énoncé grec (+ Rabat 1101) est qu'il n'est pas dit d'emblée que le pentagone est une face du dodécaèdre ; cf. aussi la variante que l'on observe dans le diorisme (4) entre « 12 pentagones » et « surface du dodécaèdre ». On notera que dans ce Lemme, le modèle de Rabat 1101 était quasi identique au texte grec de la famille ***PBVv***. L'énoncé du ms Escorial 907 est très proche de celui de Rabat 1101, sauf qu'il annule le petit paradoxe évoqué *supra,* en décrivant le pentagone, non pas comme « à côtés et à angles égaux », mais comme « un pentagone parmi les pentagones du dodécaèdre ». Pour le reste, hormis quelques minuscules écarts, dans la séquence (2)-(13), Escorial 907 suit Rabat 1101.

84 Dans les trois manuscrits arabes utilisés, on lit : « *le carré* », "quadratum" dans *Ad. I,* 377.108 et *GC,* 419.44.

85 Les chevilles (2) et (5) existent dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* mais ni dans Rabat, ni dans le compendium.

86 Dans *Ad. I, GC* (comme dans la famille Téhéran 3586), on explicite que ceci correspond à la surface des douze bases (référence au dodécaèdre). Escorial 907 suit Rabat 1101 mais ajoute : « ce qui est la surface du dodécaèdre ». Le diorisme du compendium est proche du grec, sauf qu'il abrège [ici et dans (5)] la formulation strictement géométrique « surface entourée par … » en un libellé "mixte" : « surface de *gd* in *zb* ».

87 La jonction manque aussi dans *Ad. I,* mais ni dans *GC,* ni dans le compendium. En fait, dans la partie "preuve" (6)-(13), *GC* est identique à Rabat 1101 et Escorial 907.

88 *GC* et le compendium suivent la version du grec + Rabat 1101 + Escorial 907, et non l'extravagant « cinquième du double » de la famille Téhéran 3586 et *Ad. I.* Dans (5)-(11) *Ad. I* (378.117-118) suit la famille Téhéran 3586.

89 Absence de (9) dans ***M*** (voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 95, note 94), mais pas dans *GC* (420.11-12) ni dans le compendium (402.20-21).

90 *GC,* 420. 12-14 suit la version du grec + Rabat 1101. Le compendium, après (9), ajoute : « cinq fois la surface entourée par les deux lignes GD et ZH est donc égale à deux fois le pentagone » et fusionne (10)-(11) en une seule assertion (402.22-24). Il n'a pas la séquence (12)-(13).

91 Absence de « δώδεκα πενταγώνοις. Δώδεκα δὲ πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐστιν ἐπιφάνεια· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ » dans ***M*** (voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 95, note 95), mais pas dans *GC* (420.14-17).

(12)	Trente fois le [rectangle] contenu par ΓΔ, ZH est donc égal à la surface du dodécaèdre.	Donc, trente fois la surface entourée par les deux lignes GD et ZH est égale à la surface du dodécaèdre.	Donc six par le double du pentagone, c'est six fois ce qui résulte du produit de GD par ZT, cinq fois. Donc trente fois GD par ZT c'est comme la surface du dodécaèdre.
(13)	—	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer.

<5> = [Lemme XIV. 2/3 < b >]

(1)	Alors semblablement nous démontrerons aussi que	Et, de cette manière, nous démontrons que	Et, de même, la surface qui est égale à trente fois le rectangle[92] résultant du produit de la perpendiculaire sortant du centre de ce cercle jusqu'au côté du triangle qui y est <inscrit> — et c'est le triangle de l'icosaèdre qui est circonscrit par la sphère qui circonscrit le dodécaèdre dont le pentagone est circonscrit par ce cercle —, par le côté du triangle, est égal à la surface de l'icosaèdre[93].
(2)	—	—	**Exemple de cela[94] :**
(3)	si l'on a un triangle équilatéral tel ABΓ et autour de lui un cercle et Δ soit le centre du cercle et ΔE perpendiculaire[95],	s'il y a un triangle équilatéral, comme le triangle ABG, qu'il est circonscrit par un cercle, que le centre du cercle est le point D et que l'on mène, de lui vers BG, la perpendiculaire DE,	Le cercle ABG est circonscrit au triangle de l'icosaèdre, et c'est le triangle ABG. Le centre du cercle est le point D, et on a sorti de lui une perpendiculaire jusqu'au point E sur la ligne BG.
(4)	trente fois le [rectangle] contenu par BΓ, ΔE est égal à la surface de l'icosaèdre.	alors trente fois la surface entourée par BG et DE est égale à <la surface de> l'icosaèdre.	Je dis que trente fois le produit de BG par DE est comme la surface de l'icosaèdre dont le triangle est circonscrit par le cercle ABG[96].
(5)	—	—	**Preuve de cela :**

[92] Littéralement « *le carré* » ; "quadratum" dans *Ad. I,* 378.125 et *GC,* 420.21.

[93] Dans *Ad. I, GC* on a un énoncé non instancié, sur le même modèle que celui de la famille Téhéran 3586. Celui de *GC* a perdu la mention du second terme de la "multiplication" (« … par le côté du triangle … »). Tous trois supposent que l'icosaèdre est inscrit dans la même sphère que le dodécaèdre et font ainsi référence à XIV **2 !** Le ms Escorial 907 possède également un énoncé général, mais différent de celui de la famille Téhéran 3586 : « Et de cette manière, il apparaît que <étant donné> un triangle parmi les triangles de l'icosaèdre et que l'on mène, du centre du cercle circonscrit au triangle, une perpendiculaire à l'un des côtés du triangle, trente fois la surface entourée par l'un des côtés du triangle et par la perpendiculaire est égal à la surface de l'icosaèdre ». Il n'y a donc pas de référence à XIV **2** et sa formulation est géométrique. L'ordre est le même que celui du grec, (c_3, p_3). Le compendium possède aussi un énoncé général (XIV 6, 402.25-28) introduite avec une formule (« Similis demonstrationis est … »), très proche de celui du ms Escorial 907, à ceci près que le triangle est dit « équilatéral » (comme le grec + Rabat 1101) \ « triangle de l'icosaèdre » (Escorial 907).

[94] Les chevilles (2) et (5) existent dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* pas dans Rabat 1101, ni dans le compendium.

[95] « δὲ ἐπὶ τὴν BΓ » omis dans ***PBVv*** (voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 95, note 98).

[96] Le ms Escorial 907, *Ad. I, GC* ont aussi une ecthèse et un diorisme, mais le diorisme de l'Escorial 907 est géométrique. Lui et *GC* ont une "construction" minimale : la jonction des droites BΔ, ΔΓ (avec notre lettrage), ce que suggère d'ailleurs aussi le schéma édité par Heiberg. Le compendium n'a ni ecthèse, ni diorisme, mais la jonction de BΔ, ΔΓ est mentionnée (402.29-30).

(6)	Puisqu'en effet de nouveau le [rectangle] contenu par ΔE, BC est double de ΔBΓ, deux triangles sont donc égaux au [rectangle] contenu par ΔE, BΓ.	Et cela <parce que> la surface entourée par les deux lignes DE et BG est comme deux fois le triangle DBG. Donc deux triangles comme DBG sont égaux à la surface entourée par les deux lignes DE et BG[97].	Le produit de DE par BG est deux fois le triangle DBG.
(7)	Et tout ceci trois fois.	Nous multiplions cela trois fois.	—
(8)	Six triangles ΔBΓ sont donc égaux à trois [rectangles] contenus par ΔE, BΓ. Or six triangles tels que ΔBΓ sont égaux à deux triangles ABΓ.	Donc, six fois le triangle DBG sera égal à trois fois la surface entourée par les deux lignes DE et BG. Et six fois le triangle DBG est égal à deux fois le triangle ABG.	—
(9)	—[98]	—	Trois fois la ligne DE par BG est comme deux fois le triangle ABG.
(10)	—	—	Et trente fois DE par BG est égal à vingt fois le triangle ABG.
(11)	Et tout ceci dix fois.	Et nous multiplions cela dix fois.	—
(12)	—	—	Et vingt fois le triangle ABG est égal à la surface de l'icosaèdre dont le triangle est ABG.
(13)	Trente [rectangles] contenus par ΔE, BΓ sont donc égaux à vingt triangles ABΓ, c'est-à-dire à la surface de l'icosaèdre.	Donc, trente fois la surface entourée par les deux lignes DE et BG est égal à vingt triangles comme ABG. Et cela est égal à la surface de l'icosaèdre.	Donc trente fois la ligne DE par la ligne BG est égale à la surface de l'icosaèdre[99].
(14)	—	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer[100].

[Lemme XIV. 2/3 <c>]

(1)	—	—	Donc le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de la trentième partie de la surface du dodécaèdre à la trentième partie de la surface de l'icosaèdre[101].

[97] Cette inutile reformulation « donc 2 tr.(ΔBΓ) = Rect. (ΔE, BΓ) » n'existe ni dans la famille Téhéran 3586, ni dans l'Escorial 907, ni dans *Ad. I, GC,* ni dans le compendium, mais elle témoigne de la proximité de Rabat 1101 avec le grec. À cette exception près, le texte l'Escorial 907 et du compendium est très proche du grec ***PBVv*** et de Rabat 1101 dans cette portion (6)-(13), probablement inauthentique si l'on est bien en présence d'une démonstration potentielle.

[98] « δύο ἐστὶ τρίγωνα τὰ ABΓ. τρία ἄρα τὰ ὑπὸ ΔE, BΓ » est omis dans ***PBVv*** (voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 95, note 104). Sans doute un saut du même au même. Même "lacune" dans Rabat 1101, mais pas dans l'Escorial 907, ni dans le compendium.

[99] Les justifications dans *Ad. I* et *GC* sont très proches l'une de l'autre, plus concises que le grec. Avec notre lettrage : Rect (ΔE, BΓ) = 2tr (DBC), d'où 3Rect (ΔE, BΓ) = 2tr (ABC) (manque dans Téhéran 3586, mais pas dans Téhéran 200, ni dans Uppsala 321, ni dans l'Escorial 907). D'où 30Rect (ΔE, BΓ) = 20tr (ABΓ) or 20tr (ABΓ) = surface (icosaèdre). Donc 30Rect (ΔE, BΓ) = surface (icosaèdre).

[100] *GC* présente ensuite (420.60-421.13) une "autre" démonstration, qui n'est rien d'autre que la présentation trop détaillée d'assertions du même genre et qui explicite que 20 = 10x2 et 30 = 10x3 : 3Rect (ΔE, BΓ) = 2tr (ABΓ) ; or surface (icosaèdre) = 20tr (ABΓ), soit : surface (icosaèdre) = 10x2tr (ABΓ). Or 2tr (ABΓ) = 3Rect (ΔE, BΓ) ; donc surface (icosaèdre) = 10x3Rect (ΔE, BΓ) = 30Rect (ΔE, BΓ) = 20tr (ABΓ). Or 20tr (ABΓ) = surface (icosaèdre) ; donc 30Rect (ΔE, BΓ) = surface (icosaèdre). Comme pour XIV **1**, il n'est pas précisé que cette autre preuve *aliter* partielle a été trouvée « *in alio libro* ».

[101] Lacune dans le ms Téhéran 3586, mais pas dans les autres mss de la famille, ni dans l'Escorial 907, ni chez *Ad. I,* ni chez *GC.* La scholie grecque 39 qui se rattache à l'assertion <b>

(2)	De sorte que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi sera le [rectangle] contenu par ΓΔ, ZH relativement à celui contenu par ΒΓ, ΔΕ[102].	Pour cela, le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de la surface entourée par les deux lignes GD et ZH, de la figure qui contient le pentagone, à la surface entourée par les deux lignes BG et DE, de la figure qui contient le triangle.	Donc, le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de la surface qui résulte <du produit> de ZT par DG à la surface résultant <du produit> de DE par BG.
(3)	À partir de cela, il est évident que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi [sera][103] le [rectangle] contenu par le côté du pentagone et la perpendiculaire menée sur lui à partir du centre du cercle autour du pentagone, relativement à celui contenu par le côté de l'icosaèdre et la perpendiculaire menée sur lui à partir du centre du cercle autour du triangle, ceux de l'icosaèdre et du dodécaèdre inscrits dans la même sphère.	Et, à partir de cela, il apparaît que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de la surface entourée par le côté du pentagone et la perpendiculaire qui tombe sur lui à partir du centre du cercle, à la surface entourée par le côté de l'icosaèdre et la perpendiculaire qui tombe sur lui à partir du centre du cercle qui entoure son triangle, si le dodécaèdre et l'icosaèdre sont inscrits dans une même sphère.	Il a donc été démontré que le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre, qui sont dans une même sphère, est comme le rapport du rectangle qui résulte <du produit> de la perpendiculaire sortant du centre du cercle — qui est circonscrit au pentagone du dodécaèdre —, vers le côté du pentagone, par le côté du pentagone, à ce qui résulte <du produit> de la perpendiculaire sortant du centre du cercle vers le côté du triangle de l'icosaèdre, circonscrit par cette sphère, par le côté du triangle[104].
(4)	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer.	Et c'est ce que nous voulions démontrer.

<6> = [Proposition 3]

(1)	Cela étant clair, il faut démontrer[105] que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à celle de l'icosaèdre, ainsi sera le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre.	Et si cela est ainsi, nous démontrons que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre.	Nous voulons montrer que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont circonscrits par une même sphère, est comme le rapport du côté du cube, circonscrit par cette sphère, au côté du triangle de l'icosaèdre.
(2)	—	—	**Exemple de cela[106] :**

(9), mentionne elle aussi les trentièmes parties des surfaces des polyèdres. Dans son édition de la version d'Adélard, Busard a cru bon de considérer cette assertion non instanciée comme l'énoncé d'une Proposition, XIV **6**. C'est également ce que fait le texte hébraïque analogue au Livre XV d'al-Maghribī, dans sa proposition 29, correspondant au corollaire à M. XV 10.

102 Absence de **:** « τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ. ἐκ δὴ τούτο φανερόν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως » dans ***M*** (voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 96, note 107).

103 La version du compendium, non instanciée, coïnciderait à peu près avec le texte de ***M,*** si celui-ci ne présentait pas la désignation instanciée "τὸ ΑΒΓΔΕ" omise dans ***PBVv*** (voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 96, note 110) et dans la tradition indirecte médiévale.

104 Escorial 907 est globalement proche de la famille Téhéran 3586, quoiqu'il possède des caractéristiques reprises à Rabat 1101 : l'assertion (1) existe ; les assertions (2) et (3) sont formulées géométriquement ; dans (3), l'ordre y est (p_n, c_n) comme dans la famille Téhéran 3586, mais la façon d'indiquer que les deux solides sont inscrits dans une même sphère suit Rabat 1101 !

105 La cheville de transition en tant que telle (« Cela étant clair, il faut démontrer que … ») existe seulement dans le grec, dans Rabat 1101 et le compendium (« His positis assumimus demonstrandum quoniam … », 403.10). Dans les trois versions latines (comme dans la famille Téhéran 3586, mais pas dans Rabat 1101) on précise que les trois solides sont contenus par une même sphère [dans le grec + Rabat 1101, il faut attendre l'ecthèse (3)]. Hormis quelques *IPI,* le compendium est là aussi proche du texte grec et de Rabat 1101.

106 Les chevilles (2) et (9) existent dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* pas dans Rabat 1101, Escorial 907, ni dans le compendium.

(3)	Que soit proposé un cercle comprenant à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère, ΑΒΓ, et que dans le cercle ΑΒΓ soit inscrit[107]	Soit un cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre qui sont inscrits dans une même sphère, et c'est le cercle ABG. Traçons, dans le cercle ABG,	Nous traçons le cercle ABG qui circonscrit le triangle de l'icosaèdre,
(4)	d'une part un côté d'un triangle équilatéral, ΓΔ, d'autre part ΑΓ, celui d'un pentagone.	le côté du triangle équilatéral, et c'est GD, et le côté du pentagone, et c'est AG.	dont le côté est AB, et le pentagone du dodécaèdre, dont le côté est la ligne AG[108].
(5)	Et que soit pris le centre du cercle, E, et qu'à partir de E soient menées EZ, EH perpendiculaires à ΔΓ, ΓΑ,	Que le centre du cercle soit le point E. Nous sortons, du point E vers les deux lignes GD et GA, les deux perpendiculaires EZ et EH,	Le centre du cercle est le point D, et nous sortons, de D, une perpendiculaire jusqu'au point E de la ligne AB et nous sortons, également de D, une perpendiculaire jusqu'au point Z de la ligne AG
(6)	et que la droite HB prolonge EH en alignement, et que ΒΓ soit jointe,	et nous sortons la ligne droite HB dans le prolongement de la ligne EH jusqu'au point B de la circonférence du cercle ABG.	et nous la prolongeons, en alignement, jusqu'au point W de la circonférence du cercle.
(7)	et que soit proposé Θ le côté du cube.	Soit *t* le côté du cube.	Nous joignons AW et nous traçons le côté du cube qui est circonscrit par la sphère circonscrite au dodécaèdre et à l'icosaèdre, dont le côté de l'icosaèdre est la ligne AB, et dont le côté du dodécaèdre est le côté AG[109], et c'est la ligne *t*.
(8)	Je dis que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à celle de l'icosaèdre, ainsi est Θ relativement à ΓΔ.	Je dis que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de *t* à GD.	Je dis que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de t à la ligne AB.
(9)	—	—	**Preuve de cela :**
(10)	En effet puisque BE, ΒΓ, les deux ensemble, étant coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est BE,	Parce que si les deux lignes EB, BG sont ajoutées, et que leur ensemble est divisé selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, la partie la plus grande sera BE.	L'ensemble des deux lignes DW, WA si nous le divisons selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, la partie la plus grande sera DW,
(11)	—	—	parce que DW est la corde du sixième d'un cercle et la ligne AW est la corde du dixième d'un cercle[110].

[107] « εἰκοσαέδρου μὲν πλευρὰ ἡ ΓΔ, δωδεκαέδρου δὲ ἡ ΑΓ » omis dans ***PBVv***. Le texte de Rabat 1101, mais aussi ceux de la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* suivent ***PBVv***. Même chose dans le compendium. Cf. les indications supplémentaires données dans (7). Escorial 907 est proche de ***M***.

[108] On notera les variantes de lettrage entre d'un côté le grec, Rabat 1101 et le compendium, de l'autre, la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* [le côté du triangle équilatéral est ΓΔ (GD) dans l'une, AB dans l'autre ; le centre est E / D ; HB / DW (*du*) est le rayon qui prolonge la perpendiculaire EH / DZ], enfin Escorial 907 qui, par rapport à Rabat 1101, échange seulement G et A.

[109] Mêmes détails supplémentaires dans *Ad. I, GC* (mais pas le compendium). Escorial 907 se contente de joindre AB [= ΒΓ (dans le lettrage grec + Rabat 1101 + compendium) = AW (dans le lettrage de la famille Téhéran 3586) = *au* (dans le lettrage *Ad. I, GC*)]. Au demeurant cette droite existe dans les diagrammes grecs et dans celui de Rabat 1101.

[110] Même identification dans Escorial 907, *Ad. I, GC* (mais pas le compendium), ce qui est une façon de se référer à XIII 9. Voir par exemple *GC,* 422.15-16. Cf. les scholies grecques 42 et 49.

(12)	et, d'une part, que de EB, BΓ, les deux ensemble, la moitié est EH,	Et la moitié des deux lignes BE et BG, c'est EH;	Et nous avons démontré, dans ce qui précède de ce livre[111], que la ligne DZ est la moitié des deux lignes DW, WA, <prises> ensemble,
(13)	d'autre part, que la moitié de BE est EZ,	et la moitié de BE c'est EZ.	et que la ligne DE est la moitié de la ligne DW
(14)	—	—	parce que DW est la moitié du diamètre du cercle, et DE est une perpendiculaire <sortant> du centre sur le côté du triangle. C'est donc la moitié de la moitié du diamètre[112].
(15)	—	—	Et il a été démontré, dans le treizième Livre, que le côté du cube, s'il est divisé selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, sa partie la plus grande est le côté du pentagone du dodécaèdre qui est circonscrit par la sphère qui circonscrit le cube[113].
(16)	—	—	Et DE est la moitié de DW; et DZ est la moitié de DW et WA <pris> ensemble[114].
(17)	—	—	Et <l'ensemble> DW, WA a été divisé selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes. Et sa partie la plus grande est DW[115].
(18)	Et donc, la droite EH étant coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est EZ.	Si nous divisons la ligne EH selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, la partie la plus grande sera comme EZ.	Donc la ligne DZ, si elle est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, sa partie la plus grande est égale à la ligne DE.
(19)	Or il se trouve aussi que Θ étant coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est AΓ, comme cela a été démontré dans la [construction du] dodécaèdre[116].	—	—[117]
(20)	Donc comme Θ [est] relativement à ΓA, ainsi [est] EH relativement à EZ.	Donc le rapport de *t* à AG est comme le rapport de EH à EZ.	Donc le rapport de la ligne *t* à la ligne AG est comme le rapport de DZ à DE[118].

[111] Même renvoi explicite au Livre XIV dans *Ad. I, GC* (mais pas le compendium). Cf. les scholies grecques 43 et 49.
[112] Même *EPP* triviale dans *Ad. I, GC* (mais pas le compendium). *GC* (comme la famille Téhéran 3586, mais pas *Ad. I*) ajoute que ED est la moitié de la moitié du diamètre, ajoutant « comme cela a été démontré » (422.20-22). Cf. la scholie grecque 44. La scholie grecque 49 se réfère au « Porisme au premier théorème ».
[113] Même rappel livresque au Livre XIII avec *CNI* de XIII 17 Porisme dans *Ad. I,* 380.173-176 et *GC,* 422.22-27 (mais pas le compendium). Cf. les scholies grecques 46 et 49.
[114] Même rappel des relations « tout-moitié » dans *Ad. I, GC* (mais pas le compendium).
[115] Même rappel du résultat obtenu un peu plus haut en appliquant XIII 9 dans *Ad. I,* 380.177-179, mais pas dans *GC*. Les assertions (14)-(17), qui toutes correspondent à des scholies grecques, sont autant d'*IPI :* une explication postposée, un rappel livresque avec citation non instanciée, deux rappels internes. Des assertions similaires existent dans la longue scholie grecque 49 qui reprend toute la partie "démonstration" de XIV **3**. Il est donc significatif qu'elles n'existent pas dans les manuscrits Rabat 1101 et Escorial 907, tandis que ce dernier possédait l'identification de lignes (11).
[116] L'assertion est par la m. 2 dans ***V*** (Cf. Rabat 1101, Téhéran 3586). Dans ***PBVv***, après "AΓ", ajout : « ὡς ἐν τῇ δωδεκαέδρῳ ἐδείχθη »; dans ***V*** *supra* scr. « πορίσματι ».
[117] Cette séquence, qu'on ne trouve ni dans Rabat 1101, ni dans la famille Téhéran 3586, ni dans *Ad. I,* existe cependant dans le ms Escorial 907, dans *GC,* 422.31-33 et dans le compendium, 404.1-2, mais sans l'ajout livresque de la famille ***PBVv***.
[118] *GC* (422.29-36) est très détaillé : il précise qu'il y a section en extrême et moyenne raison dans les deux cas et que AΓ, EZ (avec notre lettrage) en sont les plus grands segments. Ce n'est le cas ni de la famille Téhéran 3586, ni d'*Ad. I,* ni du compendium. Reste qu'il y a là un recours tacite au Lemme SEMR (= *GC* XIV 12).

(21)	Le rectangle contenu par Θ, ZE est donc égal à celui contenu par ΓA, EH[119].	La surface entourée par les deux lignes *t* et EZ est donc égale à la surface entourée par les deux lignes AG et EH.	Donc la surface qui résulte du <produit de> *t* par DE est égal à la surface qui résulte du <produit de> AG par DZ.
(22)	—	—	Donc le rapport de la surface qui résulte du <produit de> t par DE à la surface qui résulte du <produit de> AB par DE est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre[120].
(23)	—	—	Et <pour> deux lignes dont chacune est multipliée par une même ligne qui leur est commune, le rapport de l'une des deux surfaces qui en résultent à l'autre surface est comme le rapport de la ligne à la ligne[121]. Que DE soit la <ligne> commune.
(24)	Et puisque comme Θ [est] relativement à ΓΔ, ainsi est le rectangle contenu par Θ, ZE relativement à celui contenu par ΓΔ, ZE,	Et, puisque le rapport de *t* à GD est comme le rapport de la surface entourée par les deux lignes *t* et EZ à la surface entourée par les deux lignes GD et EZ,	Le rapport de la ligne *t* à la ligne AB est comme le rapport de la surface qui résulte <du produit> de la ligne *t* par DE à la surface qui résulte <du produit> de la ligne AB par DE.

[119] La séquence « EH. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ZE, Θ πρὸς τὸ ὑπὸ » est omise dans ***M***.

[120] Dans (22)-(28), il semble que le texte dans le (ou les) modèle(s) de la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* ainsi que dans celui du ms Escorial 907 ait été altéré. Le texte grec lui-même n'a pas été épargné dans (28) et il est quelque peu surprenant qu'il n'y ait ni rappel du résultat acquis dans le Lemme XIV **2/3**, ni identification finale des lignes telle que (29). Le compendium est très semblable à Rabat 1101 et donc au texte grec dans (21)-(26). Il enchaîne directement avec (28), mais en suivant l'ordre de la famille Téhéran 3586. Dans (21)-(25), le ms Escorial 907 est proche de Rabat 1101 et du grec. L'altération du texte de la famille Téhéran est confirmée par plusieurs indices :

- L'assertion (22) de la famille Téhéran 3586 et de *Ad.* I est abrupte. En fait, il y a probablement une lacune engendrée par un saut du même au même. Nous donnons ici la traduction du texte sans correction. Cf. *supra,* B, § 2, note 131 et § 4, note 341.
- En effet, dans le ms Uppsala 321, f. 196b, on lit une glose marginale dont il est facile de voir qu'elle comble la lacune de (22) que nous venons d'évoquer de la manière suivante [la glose est en italiques dans la citation qui suit, (22) en romain] : « Donc le rapport de la surface qui résulte du <produit de> t par DE à la surface qui résulte du <produit de> AB par DE est *comme le rapport de la surface qui résulte de AG par DZ à la surface qui résulte de AB par DE. Or le rapport de la surface qui résulte de AG par DZ à la surface qui résulte de AB par DE est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre. Donc, le rapport de la surface qui résulte de t par DE à la surface qui résulte de AB par DE est comme le rapport* de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre ». Il y a eu saut du même au même entre les deux portions soulignées, ce qui a précisément engendré (22). La glose est soit une correction, à partir d'une autre copie, soit une conjecture de la part d'un réviseur.
- La version de Gérard de Crémone n'a pas non plus la lacune de la famille Téhéran + *Ad* I : on y rappelle d'abord le résultat du lemme, à savoir qu'il a été démontré que le rapport des rectangles Rect (ΓA, HE) : Rect (ΓΔ · ZE) [avec notre lettrage] est celui des surfaces des solides, puis on opère la substitution Rect (Θ, ZE) à la place de Rect (ΓA, HE) et on en déduit (22) ; voir *GC,* 422.38-45. Le texte est donc proche de celui que nous avons reconstitué à partir de la glose du ms Uppsala 321.
- Dans le ms Escorial 907, jusqu'ici proche de Rabat et du grec, on trouve une fin de preuve plutôt maladroite, divergente tant de celle de Rabat 1101 que de celle de la famille Téhéran 3586. Les assertions (26)-(29) sont remplacées par un argument que l'on peut résumer ainsi (avec le lettrage grec : or Rect (ΓA, HE) = (1/30)surface (dodécaèdre) et Rect (ΓΔ, ZE) = (1/30)surface (icosaèdre) ; donc (1/30)surface (dodécaèdre) : (1/30)surface (icosaèdre) :: Θ : ΓΔ ; or (1/30)surface (dodécaèdre) : (1/30)surface (icosaèdre) :: surface (dodécaèdre) : surface (icosaèdre) [cf. *supra* l'assertion XIV **2/3<c>** (1)] ; donc surface (dodécaèdre) : surface (icosaèdre) :: Θ, qui est a_6 : ΓΔ, qui est a_{20}. Il s'agit sans doute d'une tentative de correction, indépendante de celle que nous avons évoquée pour Uppsala 321 et *GC.* À noter que la scholie grecque 49 achève sa paraphrase de démonstration en rappelant le résultat du Lemme sous la forme : « or 30Rect (c_5, p_5) = surface (dodécaèdre) et 30Rect (c_3, p_3) = surface (icosaèdre) ».

[121] Cette *CNI* d'une version quelque peu curieuse de la Proposition VI 1, en termes de multiplication de lignes, et l'ecthèse correspondante permettant de "simplifier" par DE [ZE avec le lettrage grec + Rabat 1101] est probablement un ajout (cf. la scholie grecque 47). Dans *Ad. I,* 380.185-190 cette portion est placée entre crochets.

(25)	mais que celui contenu par Θ, ZE est égal à celui contenu par ΓA, EH,	et que nous avons démontré que la surface entourée par les deux lignes *t* et EZ est égale à la surface entourée par les deux lignes AG et EH,	—
(26)	donc, comme Θ [est] relativement à ΓΔ, ainsi est celui contenu par ΓA, HE relativement à celui contenu par ΓΔ, ZE,	alors le rapport de *t* à GD est comme le rapport de la surface entourée par les deux lignes AG et EH à la surface entourée par les deux lignes GD et EZ.	—
(27)	c'est-à-dire que comme la surface du dodécaèdre relativement à la surface de l'icosaèdre,	Et cela est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre.	—
(28)	—, ainsi [est] Θ relativement à ΓΔ.	Donc, le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de *t* à GD[122].	Le rapport de la ligne *t* à la ligne AB est donc comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre.
(29)	—	—	Or, la ligne t est le côté du cube et la ligne AB est le côté du triangle de l'icosaèdre qui sont circonscrits par une même sphère.
(30)	—	—	Donc le rapport du côté du cube au côté du triangle de l'icosaèdre est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont circonscrits par une <même> sphère[123].
(31)	Ce qu'il fallait démontrer[124].	Et c'est ce que nous voulions démontrer.	Et c'est ce que nous voulions démontrer.

<7> = [Transition 3 → 3*aliter* et Lemme XIV. 3/3*aliter*]

(1)	**Autrement** Démontrer que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi [est] le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre, après avoir préalablement établi ceci.	Et il sera démontré, à l'aide d'une autre preuve, que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre. Avant cela, nous présentons cette prémisse :	Et pour démontrer cela d'une autre manière, nous <le> faisons précéder par <ceci>[125] :

[122] La phrase « ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν » est omise dans ***PBVv***, mais pas dans Rabat 1101. Chez *Ad. I* et dans le compendium les rapports sont énoncés dans l'ordre inverse, comme dans la famille Téhéran 3586. Cette assertion est omise dans *GC*.

[123] *Ad. I, GC* (comme la famille Téhéran 3586) ont l'identification (29) des lignes t, AB (Θ, ΓΔ dans le lettrage grec), la conclusion générale (l'ordre de présentation de la proportion — $a_6 : a_{20}$ :: Surf (dod.) : Surf (icos.) — est inversée par rapport à l'énoncé) et, enfin, la clause rituelle habituelle CQVD. Voir *Ad. I,* 380.192-195 et *GC,* 422.55-423.1.

[124] Dans ***P*** **:** « ὅπερ ἔδει δεῖξαι».

[125] Dans *Ad. I* (381.197), *GC* (423.5) et Campanus (502.351), la cheville de transition (comme dans la famille Téhéran 3586) est brève, sans réénonciation de XIV **3**. Celle du ms Escorial 907 est identique à celle de Rabat 1101. Celle du compendium contient une cheville (404.8-11) très proche de ces deux mss arabes, même si le découpage de Busard le masque quelque peu en séparant la réénonciation de l'annonce du lemme. Dans la Proposition 31 du texte hébraïque analogue au Livre XV d'al-Maghribī, la cheville de transition introduisant la preuve alternative, très brève, est attribuée à Apollonius : « Apollonius dit : "que ceci soit démontré d'une autre manière ». Elle n'existe pas chez al-Maghribī qui manque de XIV **3**.

(2)	—	—	La surface qui résulte <du produit> des trois quarts du diamètre par les cinq sixièmes de la ligne qui sous-tend le pentagone du cercle, est égale au pentagone du cercle[126].
(3)	—	—	**Exemple de cela :**
(4)	Soit un cercle ΑΒΓ, et que dans le cercle ΑΒΓ soient inscrits ΑΒ, ΑΓ, [côtés] d'un pentagone équilatéral, et que ΒΓ soit jointe, et que soit pris le centre du cercle, Δ, et qu'à partir de Α jusqu'à Δ soit jointe une droite ΑΔ et que ΔΕ prolonge la droite ΑΔ en alignement, et que soit placée, d'une part ΔΖ la moitié de ΑΔ, que d'autre part ΗΓ soit trois fois ΓΘ.	Nous traçons le cercle ABEG et nous y dessinons deux côtés du pentagone à côtés égaux, et c'est AB et AG. Nous sortons la ligne BG, nous prenons le point D centre du cercle et nous joignons les deux points D et A par la ligne AD. Nous sortons la ligne DE en alignement de la ligne AD et nous considérons la ligne DZ comme la moitié de la ligne AD et la ligne HG trois fois la ligne GT.	Nous traçons le cercle ABG. Son diamètre est AE; et nous y traçons le pentagone BAGLK. Nous joignons BG et nous marquons le point T, là où la ligne BG coupe le diamètre. Le centre du cercle est D ; et nous joignons DB et nous divisons DE en deux moitiés au point Z ; et nous divisons GT au point W en prenant TW comme deux fois WG[127].
(5)	—	—	Donc la ligne BW est cinq sixièmes de GB et AZ est trois quarts de AE.
(6)	Je dis que le rectangle contenu par ΑΖ, ΒΘ est égal au pentagone.	Je dis que la surface entourée par les deux lignes AZ et BT est égale au pentagone qui est dans le cercle ABEG.	Je dis que le rectangle qui résulte <du produit> de AZ par BW est égal au pentagone ABKLG.
(7)	—	**Sa preuve :**	**Preuve de cela :**
(8)	En effet qu'à partir de Β jusqu'à Δ soit jointe ΒΔ.	Nous joignons les deux points B, D à l'aide de la ligne BD.	—[128]
(9) - (10) - (11)	Puisque ΑΔ est double de ΔΖ, donc ΑΖ est hémiole de ΑΔ. Ensuite, puisque ΗΓ est trois fois ΓΘ, deux fois ΘΓ est ΗΘ. Donc ΗΓ est hémiole de ΘΗ.	Puisque AD est deux fois DZ, la ligne AZ est comme une fois et demie la ligne AD. De même, comme la ligne GH est trois fois la ligne GT, la ligne HT sera comme deux fois la ligne GT. Et, pour cela, la ligne GH sera comme une fois et demie la ligne TH.	TB est comme TG; et TG est comme trois fois GW[129] ; et DZ est la moitié de AD. Donc la ligne AZ est trois fois DZ[130] ; et AZ est comme une fois et demie AD ; et GT est comme une fois et demie WT.

[126] *Ad. I, GC* et Campanus ont (comme dans la famille Téhéran 3586) un énoncé général dont la forme, chez *GC* (mais pas *Ad. I*), est d'ailleurs plutôt celle d'un diorisme : « Je dis donc que la surface qui est produite par la multiplication des trois quarts du diamètre par les cinq sixièmes de la ligne sous-tendue par l'angle du pentagone d'un cercle est égale au pentagone du cercle ». Le ms Escorial 907 et le compendium ont également un énoncé non instancié, mais libellé en termes surfaciques, pour un pentagone "à côtés et à angles égaux" (Escorial 907) ou "équilatéral" (compendium) *versus* le « pentagone du cercle » (sans doute pour signifier "régulier") dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC*. Le compendium se singularise en parlant de la « corde de l'angle du pentagone » (*versus* « la ligne qui sous-tend le pentagone » dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I,* « la ligne qui sous-tend l'angle du pentagone » dans Escorial 907 et *GC*) et avec la terminologie latine traditionnelle pour exprimer les fractions : "dodrans" (= 1/4 en moins, soit 9/12), "dextans" (= 1/6 en moins soit 10/12). Cf. Campanus, 502.351–503.385.

[127] Même construction divergente dans *Ad. I, GC.* Dans le compendium, la construction (et le lettrage) ainsi que la preuve sont celles du grec et de la version Rabat 1101. Même chose dans Escorial 907 sauf à la fin de (4), pour la construction de GT comme moitié de HT.

[128] Cette jonction a été réalisée avant le diorisme dans *Ad. I, GC* (comme dans la famille Téhéran 3586), mais elle existe aussi à cette place dans Escorial 907. Ici commence une première séquence démonstrative (8-18) destinée à établir l'égalité : « le rectangle contenu par ΑΔ, ΗΒ est égal à celui contenu par ΖΑ, ΗΘ, soit deux triangles ΑΒΔ ». Dans cette portion, Escorial 907 est identique à Rabat 1101.

[129] *EPP* triviale dans *GC,* 423.32 : « car *gu* (GW dans le lettrage de Téhéran 3586) est un sixième de *gb* ».

(12)	Donc comme ZA [est] relativement à AΔ, ainsi est ΓH relativement à HΘ.	Donc, le rapport de ZA à AD est comme le rapport de GH à HT.	Le rapport de AZ à AD est donc comme le rapport de GT à WT.
(13)	Le rectangle contenu par ZA, HΘ est donc égal à celui contenu par ΔA, ΓH.	Donc, la surface entourée par les deux lignes ZA et HT est égale à la surface entourée par les deux lignes AD et GH.	—
(14)	Or ΓH est égale à BH.	Et la ligne GH est égale à la ligne BH.	Et GT est comme TB.
(15)	—	—	Donc le rapport de AZ à AD est comme le rapport de TB à WT[131].
(16)	Celui contenu par AΔ, BH est donc égal à celui contenu par AZ, ΘH.	Donc, la surface entourée par les deux lignes AD et BH est égale à la surface entourée par ZA et HT.	Et le rectangle qui résulte <du produit> de AZ par TW est égal au rectangle qui résulte <du produit> de AD par BT.
(17)	Or celui contenu par AΔ, BH est deux triangles tels que ABΔ.	Et la surface entourée par les deux lignes AD et HB est égale au double du triangle ABD.	Et AD par BT est le double du triangle ABD[132];
(18)	Et donc celui contenu par AZ, HΘ est deux triangles ABΔ.	Donc, la surface entourée par les deux lignes ZA et HT est comme deux fois le triangle ABD.	—
(19)	Cinq [rectangles contenus] par AZ, HΘ sont donc dix triangles.	Donc cinq fois la surface entourée par les deux lignes AZ et HT est égale à dix fois le triangle ABD.	—[133]
(20)	Or dix triangles sont deux pentagones.	Et dix fois le triangle ABD c'est deux fois le pentagone.	et le pentagone AGLKB est cinq fois le triangle ABD.

[130] Dans (9)-(11) de la famille Téhéran 3586 + *Ad. I,* 381.207-211*,* il y a perturbation de l'ordre des mêmes égalités mobilisées pour établir (12) en exhibant deux rapports hémioles. *GC,* 423.33-42 procède un peu différemment en partant de rapports triples et non hémioles (avec notre lettrage) : On a ΓH = 3CH; AZ = 3ΔZ donc AZ : ZΔ :: ΓH : ΘΓ ; d'où, par sép. et inv., ZΔ : AΔ :: ΘΓ : HΘ, et par comp., AZ : AΔ :: ΓH : ΓΘ. Or ΓH = HB. D'où : AZ : AΔ :: HB : ΓΘ et Rect (AΔ, HB) = Rect. (ZA, HΘ) (10)-(11).

[131] Entre (13) et (15), même phénomène d'oscillation entre identité de rapports ou égalités de rectangles pour aboutir à (16).

[132] Dans *GC* (423.42-43) on a une *EPP* triviale (« car *bt* est perpendiculaire sur *ad* »). Cf. la scholie grecque 51.

[133] Ici commence la seconde séquence démonstrative pour établir l'égalité de l'aire du pentagone et du rectangle annoncé. Nous trouvons trois preuves distinctes, indice de ce que le texte de la fin du Lemme a lui aussi probablement souffert :
(*i*) celle du texte grec, de Rabat 1101 et du compendium.
(*ii*) celle de la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC*.
(*iii*) celle de l'Escorial 907.
Même si le texte d'*Ad. I* est lacunaire, sa démarche se rattache indiscutablement à celle de la famille Téhéran 3586 + *GC* qui consiste à additionner trois rectangles : Rect. (ZA, HΘ), Rect (AΔ, HB), Rect (BH, ΔZ) dont la somme est égale à 5 triangles ABΔ (les deux premiers étant égaux à 2 triangles ABΔ, le dernier étant égal au triangle ABΔ parce que ΔZ est la moitié de AΔ comme le précise une *EPP* dans la famille Téhéran 3586 + *GC*). En regroupant les deux derniers on obtient Rect (BH, AZ), qui, avec Rect. (ZA, HΘ), donne Rect (ZA, BΘ). La fin de preuve dans l'Escorial 907 s'apparente à cette démarche d'addition de rectangles, mais de deux rectangles seulement — Rect. (ZA, HΘ) et Rect (BH, AZ) —, après avoir remarqué que, puisque BH est 3/2 de HT, Rect (BH, AZ) = 3 triangles ABΔ. La formulation reste cependant géométrique ; la conclusion rappelle l'identification des droites ZA et BΘ.

(21)	Cinq [rectangles contenus] par AZ, HΘ sont donc égaux à deux pentagones.	Donc cinq fois la surface entourée par les deux lignes AZ et HT c'est deux fois le pentagone.	Donc AZ par WT et AD par BT <pris> ensemble, c'est égal à quatre fois le triangle ABD. Et TB par DZ est comme le triangle ABD parce que DZ est la moitié de la base AD. Donc, l'ensemble AZ par WT, AD par BT et DZ par BT est égal au pentagone AGLKB. Or AZ par WB est égal à AZ par WT, AD par TB et DZ par BT <ensemble>.
(22)	Et puisque HΘ est deux fois ΘΓ, le [rectangle contenu] par AZ, HΘ est deux fois celui contenu par AZ, ΘΓ.	Et puisque la ligne HT est deux fois la ligne TG, la surface entourée par les deux lignes AZ et HT est comme deux fois la surface entourée par les deux lignes AZ et TG.	
(23)	Deux [rectangles] contenus par ZA, ΘΓ sont donc égaux à celui contenu par AZ, HΘ.	—[134].	
(24)	—	Et nous multiplions cela cinq fois.	
(25)	Et dix [rectangles] contenus par AZ, ΘΓ sont donc égaux à cinq contenus par AZ, HΘ, c'est à dire deux pentagones.	Alors, dix fois la surface entourée par les deux lignes AZ et TG c'est comme cinq fois la surface entourée par les deux lignes AZ et HT. Et cela est égal à deux fois le pentagone.	
(26)	De sorte que cinq contenus par AZ, ΘΓ sont égaux à un seul pentagone	Pour cela, cinq fois la surface entourée par les deux lignes AZ et TG sera comme le pentagone.	
(27)	Or cinq fois ceux contenus par AZ, ΘΓ sont égaux à celui contenu par AZ, ΘB,	Et cinq fois la surface entourée par les deux lignes AZ et TG, c'est égal à la surface entourée par les deux lignes AZ et BT.	
(28)	puisque BΘ est quintuple de ΘΓ	Et cela parce que la ligne BT est cinq fois la ligne TG.	—
(29)	et que AZ est hauteur commune.	Et la ligne AZ est une hauteur commune[135].	—
(30)	Le rectangle contenu par AZ, ΘB est donc égal à un seul pentagone.	Donc la surface entourée par les deux lignes AZ et BT est égale au pentagone.	Donc AZ par WB est égal au pentagone ABKLG.
(31)	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer.	Et c'est ce que nous voulions démontrer.

<8> = [3 *aliter*]

(1)	Cela étant clair, que soit maintenant proposé le cercle comprenant à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère, ABΓ.	Cela étant démontré, nous traçons un cercle qui circonscrit le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre qui sont inscrits dans une même sphère, et c'est le cercle ABG.	Nous voulons démontrer que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont dans une même sphère qui les circonscrit, est comme le rapport du côté du cube, que circonscrit cette sphère, au côté de l'icosaèdre[136].
(2)	—	—	**Exemple de cela[137] :**

[134] La séquence (23) manque dans Rabat 1101 ; dans le compendium, c'est (23)-(24).
[135] (29) manque également dans le compendium.
[136] Le ms Escorial 907, *Ad. I, GC* ont un énoncé général (comme dans la famille Téhéran 3586) et plus précis. Quoiqu'il y ait quelques différences de formulation dans la construction (par exemple le cercle est introduit comme le cercle de diamètre *aez*), le compendium est très proche de la version Rabat 1101 (donc du grec), avec de minimes variantes dans la construction et la conclusion.
[137] Les chevilles (2) et (8) existent dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I + GC,* pas dans Rabat 1101, ni dans le compendium.

(3)	Et que dans le cercle ΑΒΓ soient inscrits ΒΑ, ΑΓ, côtés du pentagone équilatéral et que ΒΓ soit jointe. Et que soit pris le centre du cercle Ε et qu'à partir de Α jusqu'à Ε soit jointe ΑΕ et que soit prolongée ΑΕ vers Ζ et que ΑΕ soit deux fois ΕΗ` que ΚΓ soit trois fois ΓΘ, et qu'à partir de Η soit menée ΔΜ à angles droits avec ΑΖ.	Et nous traçons, dans ce cercle, deux des côtés du pentagone, et c'est BA et AG, et nous sortons la ligne BG. Soit E le centre du cercle. Nous joignons les deux points A et E par la ligne AE et nous la prolongeons jusqu'à Z <sur la circonférence>. Que la ligne AE soit deux fois la ligne EH et que la ligne KG soit trois fois la ligne GT. Que, par le point H, passe une ligne qui coupe AZ selon des angles droits, et c'est DM.	Nous traçons le cercle ABG et nous y traçons le pentagone du dodécaèdre, et c'est le pentagone ABKLG, et le triangle de l'icosaèdre, et c'est le triangle ATZ[138]. Nous joignons GB et nous sortons le diamètre AE qui coupe GB au point W ; et le centre est D. Et nous marquons Y, là où ZT coupe le diamètre, et nous séparons de la ligne GB ses cinq sixièmes, et c'est la ligne GS.
(4)	—	—	La ligne GB sous-tend l'angle du pentagone, et c'est le côté du cube, circonscrit par la sphère qui circonscrit le dodécaèdre[139].
(5)	—	—	Je dis que le rapport de la ligne GB à la ligne ZT est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre dont le cercle circonscrit leur pentagone et leur triangle.
(6)	ΔΜ est donc le [côté] d'un triangle équilatéral.	Le triangle ADM est donc équilatéral.	—
(7)	Que soient jointes ΑΔ, ΑΜ[140]. Le triangle ΑΔΜ est donc équilatéral.	—	—
(8)	—	—	**Preuve de cela** :
(9)	Et puisque d'une part le [rectangle contenu] par ΑΗ, ΘΒ est égal au pentagone, d'autre part celui contenu par ΑΗ, ΗΔ au triangle,	Puisque la surface entourée par les deux lignes AH et TB est égale au pentagone circonscrit par ce cercle et que la surface entourée par les deux lignes AH et HD est égale au triangle AMD,	<Le produit de> AY par GS est égal au pentagone ABKLG[141] ; et <le produit de> AY par ZY est égal au triangle ATZ.
(10)	donc, comme le [rectangle contenu] par ΑΗ, ΘΒ [est] relativement à celui contenu par ΔΗ, ΗΑ, ainsi est le pentagone relativement au triangle.	le rapport de la surface entourée par les deux lignes AH et TB à la surface entourée par les deux lignes AH et HD est comme le rapport du pentagone au triangle.	—
(11)	Or comme le [rectangle contenu] par ΒΘ, ΑΗ, [est] relativement à celui contenu par ΔΗ, ΗΑ, ainsi [est] ΒΘ relativement à ΔΗ.	Et le rapport de la surface entourée par les deux lignes AH et TB à la surface entourée par les deux lignes AH et HD est comme le rapport de BT à DH[142].	Et puisque la ligne AY est commune à la ligne GS et à la ligne ZY, le rapport du pentagone ABKLG au triangle ATZ est comme le rapport de GS à ZY.

[138] Même construction alternative dans *Ad. I* et *GC*. *GC* (mais pas *Ad. I*) possède à cet endroit une *EPP* + *CNI* de XIV **2** (424.22-24). Escorial 907 combine les éléments de construction de Rabat 1101 et de la famille Téhéran 3586, tout en restant plus proche de Rabat 1101.

[139] Même identification dans *Ad. I* et *GC* qui ont aussi un diorisme (5), mais pas le compendium. Escorial 907 identifie non seulement BG (BD dans son lettrage) comme a_6, mais aussi ZT (TK dans son lettrage) comme a_{20}, comme le fait l'assertion (6) du grec à sa manière. Escorial 907 n'a ni diorisme, ni l'assertion (7) ; cf. note suivante.

[140] « ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΑΜ » est omis dans ***PBVv***. Dans Rabat 1101 et le compendium, c'est toute la séquence (7).

[141] Explications supplémentaires postposées (rappels) dans *GC,* 424.37-39, mais (10) manque. À cet endroit, le manuscrit d'*Ad. I* est lacunaire (382.232-233).

[142] Le compendium, 405.3-5 fait une seule assertion avec (10)-(11). Escorial 907 énonce directement le rapport du pentagone au triangle comme rapport de lignes. Dans la séquence (9)-(13), il est proche de Rabat 1101 et un peu plus précis que lui.

(12)	Et donc comme douze ΘB [sont] relativement à vingt ΔH, ainsi [sont] douze pentagones relativement à vingt triangles,	Donc, le rapport de douze fois BT à vingt fois DH est comme le rapport de douze pentagones à vingt triangles.	Donc le rapport de douze fois GS à vingt fois ZY est comme le rapport de douze fois le pentagone ABKLG à vingt fois le triangle ATZ.
(13)	c'est-à-dire la surface du dodécaèdre relativement à celle de l'icosaèdre.	Et c'est le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre.	Donc, le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport de douze fois GS à vingt fois ZY.
(14) - (15) - (16)	Et d'une part douze BΘ sont dix BΓ. Car, d'une part BΘ est cinq fois ΘΓ, d'autre part BΓ est six fois ΓΘ. Douze BΘ sont donc égales à dix BΓ..	Et douze fois BT c'est dix fois BG et cela parce que BT est cinq fois TG et BG est comme six fois TG[143]. Donc, six fois BT est égal à cinq fois BG. Et si nous doublons cela[144], douze fois BT sera égal à dix fois BG.	Or GS est cinq sixièmes de GB et ZY est la moitié de ZT. Et douze fois cinq est égal à dix fois six. Donc, dix fois GB est égal à douze fois GS.
(17)	Or vingt ΔH sont dix ΔM`	Et vingt fois DH c'est dix fois DM.	Et dix fois ZT est égal à vingt fois ZY.
(18)	car ΔM est deux fois ΔH.	Et cela parce que la ligne DM est deux fois la ligne DH.	—[145]
(19) - (20)	Donc, comme dix BΓ [sont] relativement à dix ΔM, c'est-à-dire BΓ relativement à ΔM[146], ainsi [est] la surface du dodécaèdre relativement à la surface de l'icosaèdre. Et d'une part BΓ est le côté du cube, d'autre part ΔM celui de l'icosaèdre.	Donc, le rapport de dix fois BG à dix fois DM est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, lequel est comme le rapport de BG à DM, qui est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre.	Donc, le rapport de dix fois GB, qui est le côté du cube, à dix fois TZ, qui est le côté du triangle de l'icosaèdre, est comme le rapport de GB à ZT.
(21)	Et donc, comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi [est] BΓ relativement à ΔM, c'est-à-dire le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre.	—	Donc, le rapport de GB à ZT est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre que circonscrit une même sphère.
(22)	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer.	Et c'est ce que nous voulions démontrer.

[143] L'explication n'est pas postposée dans le compendium.
[144] La séquence « Donc, six fois BT est égal à cinq fois BG. Et si nous doublons cela », qui existe dans ***M***, est omise dans ***PBVv*** (voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 100, notes 173-175) et dans Escorial 907, mais pas dans Rabat 1101.
[145] Comme souvent dans les séquences de calculs un peu triviaux, on trouve diverses manières de les dérouler, dans le grec, Rabat 1101 et le compendium, dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* et dans Escorial 907. Dans la séquence (14)-(16) Escorial est plus proche de la famille Téhéran 3586, c'est-à-dire plus concis que Rabat 1101. Il n'a pas non plus (19)-(20), mais une conclusion instanciée très proche de (21).
[146] Ajout dans ***PBVv*** **:** « τουτέστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΔΜ » par rapport à ***M***. Même chose dans Rabat 1101.

<9> = [Proposition 4]

(1)	Il faut alors démontrer aussi qu'une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison, comme [le rapport qu]'a la droite pouvant produire le carré de la droite entière plus celui sur le grand segment, relativement à la droite pouvant produire le carré de la droite entière plus celui sur le petit segment, ce même rapport, le côté du cube l'a relativement au côté de l'icosaèdre.	Nous voulons démontrer que si une certaine ligne droite est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance du carré résultant de la ligne tout entière, avec le carré résultant de la partie la plus grande, à la ligne en puissance du carré résultant de la ligne tout entière, avec le carré résultant de la partie la plus petite, est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre.	Nous voulons démontrer que [pour] toute ligne divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance de toute la ligne et de sa partie la plus grande à la ligne en puissance de toute la ligne et de sa partie la plus petite, est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre qui sont circonscrits par une même sphère[147].
(2)	—	—	**Exemple de cela[148] :**
(3)	Soit le cercle AB comprenant à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux qui sont inscrits dans la même sphère, et que soit pris le centre du cercle, Γ, et qu'une certaine [droite] soit menée jusqu'à lui à partir du point Γ, au hasard, soit ΓB, et qu'elle soit coupée en extrême et moyenne raison en Δ et que son plus grand segment soit ΓΔ.	Soit un cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre, qui sont inscrits dans un même cercle, et c'est AB. Soit le point G son centre. Nous sortons du point G vers la circonférence du cercle la ligne BG, de quelque manière que ce soit, et nous la divisons selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, au point D. Soit GD, sa partie la plus longue.	La ligne BG a été divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes au point D et la partie la plus grande est GD. Nous traçons autour du point G, et à une distance GB, le cercle AB[149].

---

[147] Les variantes de l'énoncé sont importantes :
(*i*) « forme indéfinie / conditionnelle / universelle » (Grec + *Ad.I* + compendium / Rabat 1101 + Escorial 907 / Famille Téhéran 3586 + *GC*).
(*ii*) Le compendium inverse l'ordre de présentation de la proportion ($a_6 : a_{20} :: \partial_1 : \partial_2$) et annule en quelque sorte la question de la forme.
(*iii*) Les droites ont puissance sur « des carrés » / « sur des droites » (Grec + Rabat 1101 + Escorial 907 + compendium / Famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC*).
(*iv*) La famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* mais aussi Escorial 907 et le compendium, précisent que le cube et l'icosaèdre sont ceux qui sont inscrits dans une même sphère.

[148] Les chevilles (2) et (11) existent dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* pas dans Rabat 1101, ni dans Escorial 907, ni dans le compendium.

[149] L'ecthèse de cette Proposition est particulièrement complexe. Il y a clairement deux familles textuelles très divergentes, d'une part celle du Grec + Rabat 1101 + compendium, d'autre part celle de la famille Téhéran 3586 + Escorial 907 + *Ad. I* + *GC*. Voir en particulier les étapes (6)-(7). Dans *Ad. I,* 383.251-260 et *GC*, 425.35-48, comme dans la famille Téhéran 3586 et Escorial 907, on exhibe *cinq* lignes : *e* est définie comme le côté du triangle du cercle (et non comme le côté de l'icosaèdre) ; *z* est définie comme le côté du pentagone du cercle ; *w* est définie comme le côté du cube qui est contenu dans la sphère qui circonscrit la figure à xx bases dont le côté de sa base triangulaire est égal à *e* et la figure à xii bases dont le côté de sa base pentagonale est égal à *z*. Sont ensuite introduites les lignes *t* et *l,* comme ici dans (6) et les identifications (7)-(9), ce qui permet de formuler un diorisme instancié (*GC,* 425.48-51; *Ad. I,* 383.261-262), absent du texte grec. Le fait d'avoir introduit la ligne *t* égale, en puissance, aux lignes *gb*, *bd* permettra également à la famille Téhéran 3586 + Escorial 907 + *Ad. I* + *GC* d'énoncer les proportions sur des lignes là où le texte grec, Rabat 1101 et le compendium, avant la conclusion, s'en tiennent à des formulations en termes de carrés. Les divergences entre Escorial 907 et la famille Téhéran 3586 sont minuscules : la deuxième partie de (9) — le rappel — et la référence livresque (21) n'existent pas dans Escorial 907. Dans (24), il a un texte plus complet, comme le grec et le compendium. Il possède une conclusion générale (33) comme Rabat 1101. La version du compendium est proche du texte grec et ne construit que trois lignes (e, z h). Mais *gb* est introduite comme un demi-diamètre du cercle et on a un diorisme instancié (405.23-24) : « je dis que le rapport du côté *h* au côté *e* est celui de la ligne produisant les carrés de *gb, gd* à la ligne produisant les carrés de *gb, bd* » (lacune du grec ?). Sa partie "preuve" est extrêmement proche de celle de Rabat 1101, et donc du grec, à une omission près. Il existe par ailleurs une autre preuve de XIV **4** dans la scholie VI de la version *GC,* 440.l5–441.21, qui coïncide avec celle de Rabat 1101, à ceci près qu'elle possède les chevilles (2) et (11). Enfin les Prop. XIV 9 de la recension de Campanus et XV 6 dans celle d'al-Maghribī proposent, sur un schéma géométrique différent, proche de celui de notre Prop. XIV 3*alit.,* une preuve apparentée à celle des versions arabo-latines, mais encore plus claire (voir respectivement, *Camp.* 505.434–507.467 et [Hogendijk, 1993], pp. 193-194). Chez Campanus, on introduit deux lignes auxiliaires seulement, *h* et *k,* respectivement égales, en puissance, aux lignes (ΓB, ΓΔ), (ΓB, BΔ), avec notre lettrage, une seule chez al-Maghribī, la ligne H égale, en puissance, aux lignes ΓB, BΔ (pour le couple (ΓB, ΓΔ), il suffit de remarquer que Z convient). Dans ces deux rédactions, le noyau argumentatif mathématique (V 16,

(4)	Donc ΓΔ est le côté du décagone inscrit dans le même cercle[150].	La ligne GD est le côté du décagone inscrit dans ce cercle.	—
(5)	Que soit alors proposé E le côté de l'icosaèdre, Z celui du dodécaèdre, H celui du cube. Donc d'une part E est le côté du triangle équilatéral, d'autre part Z celui du pentagone inscrit dans le même cercle,	Soit la ligne *e* le côté de l'icosaèdre et la ligne *z* le côté du dodécaèdre, la ligne *h* le côté du cube. La ligne *e* est le côté du triangle équilatéral et la ligne *z* est le côté du pentagone inscrit dans ce cercle.	Et nous traçons la ligne *e*, côté du triangle du cercle AB, la ligne *z*, côté du pentagone du cercle AB et la ligne *w*, côté du cube circonscrit par la sphère qui est circonscrite à l'icosaèdre dont le côté est la ligne *e*.
(6)	—	—	Nous traçons la ligne *t* qui est en puissance des deux lignes BG, BD et la ligne *l* qui est égale à la ligne DG.
(7)	—	—	La ligne DG est donc le côté du décagone du cercle AB. La ligne BG est le côté de son hexagone ; et DG est la partie la plus grande.
(8)	et Z est le plus grand segment de H[151].	Et la ligne *z* est la partie la plus grande de la ligne *h* si elle est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes.	—
(9)	—	—	La ligne *z*, qui est le côté du pentagone du cercle AB est donc en puissance de la ligne BG et de la ligne DG, la plus grande. Et nous avions tracé la ligne t qui est en puissance de la ligne BG et de la ligne BD, la <partie la> plus petite.
(10)	—	—	Je dis que le rapport de la ligne *z* à la ligne *t* est comme le rapport de la ligne *w*, qui est le côté du cube, à la ligne *e*, qui est le côté de l'icosaèdre.
(11)	—	—	**Preuve de cela :**
(12)	Et puisque E est égal au côté du triangle équilatéral, que le côté du triangle équilatéral est, en puissance, triple de BΓ	Et cela parce que la ligne *e*, <qui> est égale au côté du triangle équilatéral, est en puissance de trois fois le carré résultant de la ligne BG.	La ligne *e* est en puissance de trois fois la ligne BG parce que la ligne *e* est le côté du triangle et la ligne BG est le côté de l'hexagone.
(13)	—	—	Cela a été démontré dans le treizième Livre. Et il a été démontré là que toute ligne divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, la ligne en puissance de toute la ligne et de la partie la plus petite est en puissance de trois fois la partie la plus grande[152].

VI 22, XIII 4, 8, 10, 12, 17Por. ; XIII 9bis + lemme SEMR; XIV 2) est toutefois le même. Les remaniements que l'on observe dans la tradition indirecte s'explique peut-être par la corruption de la fin de preuve (30-33) du texte grec.

[150] D'après la Proposition additionnelle XIII. XIII 9bis. Cf. le rappel (7) dans la famille Téhéran 3586.

[151] La précision « ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης » manque dans ***PBVv*** (mais pas dans Rabat 1101).

[152] Escorial 907, *Ad. I,* 383.264-268 et *GC,* 425.54-426.5 possèdent le même renvoi, avec *CNI* de XIII 4 et une ecthèse correspondante, particulièrement détaillée dans *GC*. Cf. la scholie grecque 60.

(14)	{le carré sur E est donc triple de celui sur BΓ}[153],	Donc, le carré résultant de *e* est trois fois le carré résultant de la ligne BG.	—
(15)	or il se trouve aussi que les carrés sur ΓB, BΔ sont triples de celui sur ΓΔ,	Et les deux carrés résultant de BG et BD sont trois fois le carré de GD.	Donc la ligne[154] *t* est en puissance de trois fois la ligne DG.
(16)	—	—	Et la ligne DG est comme la ligne *l*.
(17)	—[155]	—	Donc le rapport de la ligne *e* à la ligne BG est comme le rapport de la ligne *t* à la ligne *l*.
(18)	et de manière alterne, comme le carré sur E [est] relativement à ceux sur ΓB, BΔ, ainsi [est] celui sur ΓB relativement à celui sur ΓΔ.	Si nous permutons, le rapport du carré de *e* aux deux carrés de BG {et de BD} est comme le rapport du carré de BG au carré de GD.	Et si nous permutons, le rapport de la ligne *e* à la ligne *t* est comme le rapport de la ligne BG à la ligne *l*.
(19)	Or comme celui sur BΓ [est] relativement à celui sur ΓΔ, ainsi [est] celui sur H relativement à celui sur Z.	Et le rapport du carré résultant de BG au carré de GD est comme le rapport de *h* au carré de *z*.	—
(20)	Car Z est le plus grand segment de H[156].	Si la ligne {h} est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, la plus grande de ses deux parties est égale à la ligne *z*.	Et la ligne *w*, si elle est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, sa partie la plus grande est *z*.
(21)	—	—	Et cela a été démontré dans le treizième Livre[157].
(22)	—	—	Donc, le rapport de la ligne *w* à la ligne *z* est comme le rapport de la ligne BG à la ligne *l*, parce que la ligne *l* est la partie la plus grande de BG ; et le rapport de BG à *l* est comme le rapport de *e* à *t*.
(23)	Et donc, comme le carré sur E [est] relativement à ceux sur ΓB, BΔ, ainsi [est] celui sur H relativement à celui sur Z.	Donc, le rapport du carré de *e* aux deux carrés BG, GD est comme le rapport du carré de *h* au carré de *z*.	Donc, le rapport de *e* à *t* est comme le rapport de *w* à *z*.
(24)	De manière alterne et par inversion ;	Et si nous permutons[158],	Et si nous permutons,
(25)	donc, comme le carré sur H [est] relativement à celui sur E, ainsi [est] celui sur Z relativement à ceux sur ΓB, BΔ.	le rapport du carré résultant de *h* au carré de *e* est comme le rapport du carré de *z* aux deux carrés BG et BD.	le rapport de *w* à *e* est comme le rapport de *z* à *t*.
(26)	Or celui sur Z est égal à ceux sur BΓ, ΓΔ.	Et le carré résultant de *z* est égal aux deux carrés BG et GD.	Et *z* est en puissance de BG, GD ;

153 Omis dans ***M*** et dans le compendium.

154 *Ad. I* et *GC* manipulent des proportions entre lignes, comme la famille Téhéran 3586. Même chose dans al-Maghribī XV 6.

155 La séquence « donc comme le carré sur E … à celui sur CD » manque dans ***PBVv***, Rabat 1101, la scholie VI *in GC* et le compendium, lesquels, d'emblée, donnent la proportion permutée ; sans doute le résultat d'un saut du même au même.

156 L'*EPP* du compendium (405.29-30) est non instanciée.

157 Même rappel et même référence livresque au Livre XIII dans *Ad. I* (entre crochets) et *GC,* 426.14-18, mais pas dans l'Escorial 907. Dans *GC* il y a aussi une étrange *CNI* du Lemme SEMR (= *GC* XIV 12) ; voir *supra,* III, § 3, note 42. Cette *CNI* n'existe ni dans la famille Téhéran 3586, ni dans *Ad. I.*

158 Escorial 907, la scholie VI *in GC* et le compendium correspondent au grec, et non à Rabat 1101, qui a perdu l'inversion !

(27)	car le côté du pentagone est, en puissance, égal à la fois au côté de l'hexagone et à celui du décagone[159].	Et cela parce que le côté du pentagone est en puissance du côté de l'hexagone et du côté du décagone.	—
(28)	—	—	et *t* est en puissance de BG, BD.
(29)	Donc comme le carré sur H [est] relativement à celui sur E, ainsi [sont] ceux sur ΒΓ, ΓΔ relativement à ceux sur ΓΒ, ΒΔ.	Donc, le rapport du carré de *h* au carré de *e* est comme le rapport des deux carrés BG et GD aux deux carrés BG et DB.	—
(30)	Or, comme ceux sur ΒΓ, ΓΔ [sont] relativement à ceux sur ΓΒ, ΒΔ, ainsi [est] — une droite étant coupée en extrême et moyenne raison — la droite pouvant produire le carré sur la droite entière et celui sur le grand segment relativement à la droite pouvant produire le carré sur la droite entière et celui sur le petit segment[160].	Et le rapport des deux carrés BG et GD aux deux carrés GB et BD est comme le rapport des deux carrés résultant de toute la ligne et de la partie la plus grande de toute ligne divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, aux deux carrés de toute la ligne et de sa partie la plus petite.	—
(31)	Et donc, comme le carré sur H [est] relativement à celui sur E, ainsi [est] — une droite étant coupée en extrême et moyenne raison — la droite pouvant produire le carré de la droite entière et celui du grand segment relativement à la droite pouvant produire le carré de la droite entière et celui du petit segment[161].	Donc, le rapport de *h* à *e* est comme le rapport de la ligne en puissance des deux carrés de toute la ligne et de sa partie la plus grande à la ligne en puissance des deux carrés de toute la ligne et de sa partie la plus petite.	—
(32)	Et d'une part H est le côté du cube, d'autre part E est celui de l'icosaèdre.	Or la ligne *h* est le côté du cube et la ligne *e* est le côté de l'icosaèdre[162].	Or, la ligne *w* est le côté du cube et la ligne *e* est le côté de l'icosaèdre, qui sont entourés par une même sphère.

[159] Variante ***M*** (τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων) \ ***PBVv*** om. ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 101, note 206. Cette *CNI*, qui existe dans Rabat 1101, la scholie VI *in GC* et le compendium, sans la mention « ceux inscrits dans le même cercle », autrement dit comme dans ***PBVv***, n'existe pas dans la famille Téhéran 3586, ni dans *Ad. I, GC*.

[160] L'identification (30) manque dans ***M*** et le compendium ; elle est fausse dans ***PBv*** ; elle a été corrigée dans ***V*** ; sur les problèmes textuels posés par les séquences (30)-(33), voir [Vitrac-Djebbar, 2011], note complémentaire 5.3, pp. 149-151. Dans Rabat 1101 et la scholie VI *in GC* (441.1-7), elle est correcte, mais sans faire intervenir l'expression incongrue « τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης ».

[161] Cette substitution de rapports identiques à partir de (29)-(30) est formulée différemment dans ***M*** (avec l'expression : « τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης »). Comme (30), elle est fausse dans ***PBVv***.

[162] Cette séquence et la précédente manquent dans le compendium qui passe donc directement de (29) à (33) : « $a_6 : a_{20} :: \partial_1 : \partial_2$ » (en prenant les δυναμέναι des aires, grâce à VI. 22. L'ordre de présentation des rapports est inversé comme dans l'énoncé).

(33)	Si une droite est coupée en extrême et moyenne raison, comme la droite pouvant produire la droite entière et le grand segment [est] relativement à la droite pouvant produire la droite entière et le petit segment, ainsi donc sera le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère.	Donc, si une ligne droite est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance des deux carrés résultant de toute la ligne et de la partie la plus grande à la ligne en puissance des carrés de toute la ligne et la partie la plus petite est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre qui sont inscrits dans une même sphère.	—[163]
(34)	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer.	Et c'est ce que nous voulions démontrer[164].

<10> = [Proposition 5]

(1)	Alors, qu'il soit maintenant démontré que comme le côté du cube [est] relativement à celui de l'icosaèdre, ainsi [est] le volume du dodécaèdre relativement au volume de l'icosaèdre.	Nous voulons démontrer que le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre.	Nous voulons démontrer que le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre qui sont circonscrits par une même sphère[165].
(2)	—	**La preuve :**	**Preuve de cela[166] :**
(3)	En effet puisque des cercles égaux comprennent à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère	Et cela est <ainsi> parce que le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre qui sont inscrits dans une même sphère, sont circonscrits par un même cercle.	Les cercles qui sont circonscrits au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre qui sont dans une même sphère sont égaux
(4)	et que, dans les sphères, les cercles égaux sont à égale distance du centre,	Et les cercles égaux qui sont dans la sphère, leurs distances au centre sont des distances égales.	et leurs distances au centre de la sphère sont égales.

[163] La conclusion générale existe dans *GC*, mais pas dans la famille Téhéran 3586, ni dans *Ad. I.* Elle existe aussi dans le ms Escorial 907. Il y a donc probablement une lacune commune à la famille Téhéran 3586 et au modèle d'*Ad. I.* Dans le grec (***MPBv***), elle n'est pas en accord avec son énoncé : δυναμένη de carrés / δυναμένη de droites. Celle de la scholie VI suit Rabat 1101.

[164] *Ad. I, GC* ont leur clause conclusive habituelle (CQVD), comme la famille Téhéran 3586, ainsi que Rabat 1101, Escorial 907 et la scholie VI *in GC,* mais pas le compendium. En conséquence de quoi, Busard n'a pas compris que ce qui suit est la Proposition XIV **5** qu'il édite comme une portion de la Proposition XIV **4** (= compendium XIV 9) !

[165] Même inversion de l'ordre de présentation de la proportion dans Escorial 907, *Ad. I, GC,* mais pas dans le compendium. La précision « circonscrits par une même sphère » se trouve aussi dans Escorial 907, *Ad. I, GC.* Pour le grec, Rabat 1101 et le compendium (406.8), il faut attendre l'ecthèse et son évocation de XIV **2**.

[166] Puisqu'il n'y a ni diagramme, ni lettrage, il n'y a pas non plus de séquence « exemple de cela ».

(5)	les perpendiculaires menées à partir du centre de la sphère sur les plans des cercles sont donc égales et tombent sur les centres des cercles.	Donc, les perpendiculaires, qui sortent du centre de la sphère vers leurs surfaces, sont égales; et elles tombent sur le centre de ce cercle.	Donc, les perpendiculaires qui sortent du centre de la sphère vers les surfaces des cercles et qui aboutissent aux centres des cercles circonscrits au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre, sont égales[167].
(6)	De sorte que les [droites] menées à partir du centre de la sphère sur le centre du cercle comprenant à la fois le triangle de l'icosaèdre et le pentagone du dodécaèdre sont égales, c'est-à-dire les perpendiculaires.	Donc, les perpendiculaires qui tombent du centre de la sphère sur les surfaces des cercles circonscrits aux pentagones du dodécaèdre, et qui sont sur les surfaces circonscrites aux triangles de l'icosaèdre, sont égales.	
(7)	Les pyramides ayant pour bases les pentagones du dodécaèdre et celles ayant pour bases les triangles de l'icosaèdre sont donc de hauteur égale.	Donc, si ces perpendiculaires sont égales, les pyramides, dont les bases sont les pentagones du dodécaèdre et dont le sommet est le centre de la sphère[168] et les pyramides dont les bases sont les triangles de l'icosaèdre et dont le sommet est le centre de la sphère, <ont> leurs hauteurs égales.	Pour cela, les pyramides dont les bases sont les pentagones du dodécaèdre et les pyramides dont les bases sont les triangles de l'icosaèdre sont d'égales hauteurs.
(8)	Or les pyramides de hauteur égale sont l'une relativement à l'autre comme leurs bases.	Et les pyramides d'égales hauteurs, leur rapport les unes aux autres sont comme le rapport de leurs bases, les unes aux autres.	Et les pyramides d'égales hauteurs, le rapport de l'une à l'autre est comme le rapport de leurs bases, l'une à l'autre[169].
(9)	Donc, comme le pentagone [est] relativement au triangle, ainsi [est] la pyramide, celle dont d'une part la base est le pentagone du dodécaèdre[170], d'autre part le sommet, le centre de la sphère, relativement à la pyramide dont d'une part la base est le triangle de l'icosaèdre[171], d'autre part comme sommet, le centre de la sphère.	Donc, le rapport du pentagone au triangle est comme le rapport de la pyramide dont la base est le pentagone du dodécaèdre et dont le sommet est le centre de la sphère à la pyramide dont la base est le triangle de l'icosaèdre et dont le sommet est le centre de la sphère.	Donc le rapport de la pyramide dont la base est le pentagone du dodécaèdre à la pyramide dont la base est le triangle de l'icosaèdre est comme le rapport du pentagone du dodécaèdre au triangle de l'icosaèdre[172].

167 Dans sa recension, Campanus intercale les deux résultats préliminaires (4)-(5) avant sa Proposition XIV 10 : *Sph.* I. 1 + Por. = 507.493–508.525; *Sph.* I. 6 = 508.526–509.542. Al-Maghribī en avait également fait un lemme à la fin de son Livre XIII. Voir [Hogendijk, 1993], 189, note 3.2. Lacune dans le ms Téhéran 3586 où manque la fin de (5) et (6). Elles existent dans Uppsala 321, Téhéran 200, *Ad. I* et *GC*.

168 Dans Rabat 1101, Escorial 907, et le compendium, on précise que les sommets sont le centre de la sphère, mais pas dans le grec, ni dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC*. Dans (7)-(8), Escorial 907 dit « pyramides de même hauteur ».

169 La *CNI* existe dans toutes les versions, même si la tradition indirecte ne possède pas XII 6 ! Dans sa recension (Prop. XV 22), al-Maghribī établit ce point à partir de XII 5 en triangulant la base du pentagone (comme dans la preuve grecque de XII 6).

170 Variante ***M*** (τὸ πεντάγωνον) \ ***PBVv*** (τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον), ainsi que le modèle de Rabat 1101. Dans le compendium, la précision est donnée à la première occurrence de "pentagone" dans l'antécédent de la proportion.

171 Variante ***M*** (τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ τρίγωνον) \ ***PBVv*** (et le modèle de Rabat) : « ἧς βάσις μέν ἐστι τό τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον ». Même remarque qu'à la note précédente en ce qui concerne le compendium.

172 Même inversion de l'ordre de présentation de la proportion dans Escorial 907, *Ad. I, GC*. La détermination des sommets manque dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* ; *GC* n'a que la seconde. Escorial 907 a les deux et combine donc les caractéristiques versions Rabat 1101 et de la famille Téhéran 3586.

(10)	Et donc, comme [sont] douze pentagones relativement à vingt triangles, ainsi [sont] douze pyramides ayant des bases pentagonales relativement à vingt pyramides ayant des bases triangulaires.	Et le rapport des douze pentagones aux vingt triangles est comme le rapport des douze pyramides dont les bases sont des pentagones aux vingt pyramides dont les bases sont des triangles.	Pour cela, le rapport de douze fois le pentagone du dodécaèdre à vingt fois le triangle de l'icosaèdre est comme le rapport de douze pyramides dont les bases sont les pentagones du dodécaèdre à vingt pyramides dont les bases sont les triangles de l'icosaèdre qui sont dans une même sphère[173].
(11)	Et d'une part douze pentagones, c'est la surface du dodécaèdre, d'autre part vingt triangles, la surface de l'icosaèdre.	Or les douze pentagones c'est la surface du dodécaèdre et les vingt triangles c'est la surface de l'icosaèdre.	Or douze pentagones du dodécaèdre sont égaux à sa surface. Et douze pyramides dont les bases sont ces pentagones sont le volume du dodécaèdre. Et vingt triangles de l'icosaèdre sont égaux à sa surface. Et vingt pyramides dont les bases sont ces triangles sont le volume de l'icosaèdre[174].
(12)	Donc, comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi [sont] 12 pyramides ayant des bases pentagonales relativement à vingt pyramides ayant des bases triangulaires.	Donc le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport des douze pyramides dont les bases sont des pentagones aux vingt pyramides dont les bases sont des triangles.	—[175]
(13)	Et d'une part 12 pyramides ayant des bases pentagonales, c'est le volume du dodécaèdre, vingt pyramides ayant des bases triangulaires, le volume de l'icosaèdre[176].	Et les douze pyramides dont les bases dont des pentagones c'est le volume du dodécaèdre ; et les vingt pyramides dont les bases sont des triangles c'est le volume de l'icosaèdre.	—[177]
(14)	Et donc, comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à celle de l'icosaèdre, ainsi [est] le volume du dodécaèdre relativement au volume de l'icosaèdre.	Donc le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre[178].	Donc le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont dans une même sphère, est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre.
(15)	Or il a été démontré que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, [ainsi est] le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre.	Or il a été démontré qu'il est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre[179].	Or, nous avions démontré que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont circonscrits par une même sphère, est comme le rapport du côté du cube circonscrit par cette sphère au côté <du triangle> de l'icosaèdre.

[173] Escorial 907 et *GC* sont plus détaillés et précisent certaines identifications dont celle du sommet des pyramides ; la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* ne disent rien à leur sujet ; le compendium précise simplement que les pyramides sont de même sommet. Dans Escorial 907, l'ordre est inversé, comme dans (9).

[174] Rédaction différente dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* (mais pas dans Escorial 907), qui identifient d'emblée les surfaces et les volumes de chacun des deux solides.

[175] Cette (inutile) proportion "intermédiaire" n'existe ni dans le compendium, ni dans la famille Téhéran 3586, ni dans Escorial 907, ni dans *Ad. I* + *GC*.

[176] « δωδεκαέδρου, εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ » est omis dans ***M.*** Probablement un saut du même au même.

[177] Cette identification existe dans le compendium avec la précision supplémentaire : « dans une même sphère ». Dans Escorial 907, on précise à nouveau les sommets.

[178] L'ordre de la proportion est inverse dans Escorial 907 et le compendium. Ce dernier ajoute : « c'est-à-dire le côté du cube relativement au côté du solide à xx bases » (406.25). La précision « qui sont dans une même sphère » existe aussi dans *Ad. I, GC.*

[179] Escorial 907 est proche de la famille Téhéran 3586 quoiqu'un peu plus concis. Dans le compendium, il n'y a pas de *HPR* + *CNI* (15) de XIV **3**, mais, entre parenthèses, à la suite de la remarque citée à la note précédente, on lit que c'est aussi le rapport de la ligne égale, en puissance, à une ligne coupée en extrême et moyenne raison et à son grand segment relativement

(16)	Donc, comme le côté du cube [est] relativement au côté de l'icosaèdre, ainsi [est] le volume du dodécaèdre relativement au volume de l'icosaèdre.	Donc, le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre.	Donc, le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre, qui sont dans une même sphère, est comme le rapport du côté du cube circonscrit par cette sphère au côté du triangle de l'icosaèdre.
(17)	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer.	Et c'est ce que nous voulions démontrer.

<11> = [Lemme SEMR]

(1) [180]	Et ensuite, que, si deux droites sont coupées en extrême et moyenne raison, elles sont en proportion dans la [proportion] sous-jacente, nous le démontrerons ainsi.	Quant au fait que si on a deux lignes droites et qu'elles sont divisées selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, alors les choses qui ont été évoquées précédemment y sont semblables, cela se démontre comme je le décris :	Nous voulons démontrer que toutes les situations qui adviennent à la ligne divisée selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes au point G, et dont la partie la plus grande <est> AG, adviennent à toute ligne ayant cette division, je veux dire selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes.
(2)	—	—	[**Exemple de cela :**][181]
(3)	En effet que la droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison en Γ et que son plus grand segment soit AΓ. Et semblablement aussi que ΔE soit coupée en extrême et moyenne raison en Z et que son plus grand segment soit ΔZ.	Divisons la ligne droite AB selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes au point G et soit AG sa partie la plus grande. De même, nous divisons la ligne DE selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes au point Z et soit DZ sa partie la plus grande.	Nous divisons la ligne AB selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes au point G. Sa partie la plus grande est AG. Et nous divisons une ligne quelconque selon ce rapport, je veux dire selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes. Que ce soit la ligne DE. Que le point Z la divise selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes et que <sa partie> la plus grande soit DZ.

à la ligne égale, en puissance, à cette même ligne et à son petit segment (406.25-27), autrement dit le contenu de la récapitulation finale (laquelle existe cependant dans cette version, insérée après le lemme SEMR). Dans la conclusion (16), Escorial 907 est proche de la famille Téhéran 3586.

[180] Sur la formulation de l'énoncé, voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 3, p. 118, note 326. La première partie de la scholie VII *in GC* contient une version de ce Lemme (441.25–442.10), très proche de Rabat 1101, donc du texte grec. L'énoncé dans Escorial 907, *Ad. I, GC* est, comme celui de la famille Téhéran 3586, très différent de celui du grec, mais sans la portion : « au point G, et dont la partie la plus grande <est> AG » [ici répétée dans (3)], donc non instancié, contrairement à la famille Téhéran 3586 qui mélange en quelque sorte énoncé et ecthèse ; cf. *Ad. I,* 384.313-315 ; *GC,* 427.52-56. Le même genre d'énoncé apparaît dans le compendium, 406.28-29, qui n'est plus si proche de Rabat 1101, et chez Campanus (493.64-66). Celui d'al-Maghribī est encore différent, quelque chose comme « si deux droites sont coupées en extrême et moyenne raison, le rapport de la première à la seconde est le même que le rapport du plus grand segment de la première au plus grand segment de la seconde et le même que le rapport du plus petit segment de la première au plus petit segment de la seconde » ([Hogendijk, 1993], 230).

[181] Les chevilles (2) et (5) existent dans *Ad. I, GC* et la version de la scholie VII *in GC*.

(4)	Je dis que comme la droite tout entière AB est relativement au plus grand segment AΓ, ainsi est la droite tout entière ΔE relativement au plus grand segment ΔZ[182].	Je dis que le rapport de tout AB à sa partie la plus grande, qui est AG, est comme le rapport de toute la ligne DE à sa partie la plus grande, qui est DZ[183].	Je dis que toutes les situations qui adviennent à la ligne AB adviennent à la ligne DE.[184]
(5)	—	**Sa preuve :**	**Preuve de cela :**
(6)	—	—	Si nous les divisons selon un même rapport, je veux dire selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes, le rapport de AB à AG est comme le rapport de AG à GB. Et, par cette division, a été divisée DE. Donc le rapport de DE à DZ est comme le rapport de DZ à ZE[185].
(7)	—	—	Donc le rapport de AB à AG est comme le rapport de DE à DZ[186].
(8)	En effet puisque d'une part le rectangle contenu par AB, BΓ est égal au carré sur AΓ, d'autre part celui contenu par ΔE, EZ est égal au carré sur ΔZ,	La surface entourée par les deux lignes {AB et BG est égale au carré résultant de la ligne AG. Et la surface entourée par les deux lignes}[187] DE et EZ est égale au carré résultant de DZ.	Donc ce qui résulte du produit de AB par BG est comme ce qui résulte du produit de AG par elle-même. Et, de même, ce qui résulte du produit de DE par EZ est comme ce qui résulte du produit de DZ par elle-même[188].

[182] Variante : ***M*** (πρὸς τὴν AΓ) \ ***PBVv*** (πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν AΓ) ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 104, note 236. Le diorisme de Pappus (mais aussi celui de Rabat 1101 et de la preuve de la scholie VII *in GC*) est comme celui de ***PBVv***.

[183] Malgré les écarts au niveau de l'énoncé, Rabat, la scholie VII *in GC* et le compendium sont très proches du grec pour l'ecthèse et le diorisme. Celui du compendium (406.31-32) est celui du texte grec, simplifié : « je dis que le rapport de *ab* à *ag* est le même que celui de *de* à *dz* ».

[184] Les diorismes de la famille Téhéran 3586 + *Ad. I,* 385.320-321 + *GC,* 428.7-9, du ms Escorial 907 (et d'al-Maghribī) sont en conformité avec leurs énoncés. Al-Maghribī et Campanus prolongent chacune des droites AB, DE (avec notre lettrage) par des segments (BG, EH) égaux respectivement à (BC, EF), ce qui leur permet de nommer plus simplement la somme des droites AB + BC, DE + EF comme AG, DH respectivement. Al-Maghribī le fait comme il se doit, au début de la portion "preuve", tandis que Campanus le fait seulement en milieu de preuve (494.84-86), ce qui n'est guère canonique. Fait remarquable : le diagramme du ms Escorial 907 fait aussi apparaître de tels prolongements (BD, EW), mais le texte de sa démonstration (8)-(20) — identique à celle de Rabat 1101 ! — n'en fait aucun usage quand il s'agit de d'indiquer les sommes AB + BG, DE + EZ !!

[185] Le texte grec, Rabat 1101, Escorial 907, le compendium, la preuve de la scholie VII *in GC* (ainsi que celles d'al-Maghribī et Campanus) procèdent ici comme le faisaient les traductions arabo-latines dans les premières Propositions du Livre XIII, directement en termes d'aires. En revanche ici la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* commence par rappeler que, puisqu'il y a division en extrême et moyenne raison, on a les proportions : AB : AΓ :: AΓ: BΓ et ΔE : ΔZ :: ΔZ : EZ (avec notre lettrage)..

[186] C'est précisément une des choses à démontrer ! Même chose dans *Ad. I,* 385.325; *GC,* 428.15-17. Il peut s'agir d'une trace fossile d'un diorisme plus ancien, comme celui que l'on trouve en grec ou d'une glose passée dans le texte.

[187] Lacune dans Rabat 1101 qui a perdu l'assertion concernant le rectangle contenu par AB, BG. Elle existe dans Escorial 907, le compendium (407.1) et dans la scholie VII *in GC* (441.42-43).

[188] Les formulations de la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* (et celle d'al-Maghribī et Campanus) sont arithmo-géométriques (ex multiplicatione … in … ; ex ductu … in …; ex … in …), celles de Rabat 1101, du ms Escorial 907, du compendium et de la preuve de la scholie VII *in GC,* géométriques. L'argument mathématique dans (8)-(12) est cependant le même.

(9)	donc comme le rectangle contenu par AB, BΓ [est] relativement au carré sur AΓ, ainsi est celui contenu par ΔE, EZ relativement à celui sur ΔZ.	Donc, le rapport de la surface entourée par AB et BG au carré résultant de AG est comme le rapport de la surface entourée par les deux lignes DE et EZ au carré résultant de DZ.	Donc, pour cela, le rapport de ce qui résulte du produit de AB par BG à ce qui résulte du produit de AG par elle-même est comme le rapport de ce qui résulte du produit de DE par EZ à ce qui résulte du produit de DZ par elle-même[189].
(10)	Et donc comme quatre fois le rectangle contenu par AB, BΓ [est] relativement au carré sur AΓ, ainsi [est] quatre fois celui contenu par ΔE, EZ relativement à celui sur ΔZ.	Pour cela, le rapport de quatre fois la surface entourée par les deux lignes AB et BG au carré résultant de AG est comme le rapport de quatre fois la surface entourée par les deux lignes DE et EZ au carré de DZ.	Et de même le rapport de quatre fois ce qui résulte du produit de AB par BG à ce qui résulte du produit de AG par elle-même est comme le rapport de quatre fois ce qui résulte du produit de DE par EZ à ce qui résulte du produit de DZ par elle-même.
(11)	Et par composition, comme quatre fois le rectangle contenu par AB, BΓ avec le carré sur AΓ [est] relativement au carré sur AΓ, ainsi [est] quatre fois celui contenu par ΔE, EZ avec celui sur ΔZ relativement à celui sur ΔZ.	Et si nous composons, le rapport de quatre fois la surface entourée par les deux lignes AB et BG avec le carré résultant de AG au carré résultant de AG est comme le rapport de quatre fois la surface entourée par les deux lignes DE et EZ avec le carré résultant de DZ <au carré résultant de DZ>.	Et de même, si nous composons, le rapport de ce qui résulte du produit de quatre fois AB par BG et du produit de AG par elle-même à ce qui résulte du produit de AG par elle-même est comme le rapport de ce qui résulte du produit de quatre fois DE par EZ et du produit de DZ par elle-même à ce qui résulte de DZ par elle-même[190].
(12)	De sorte aussi que comme le carré sur AB, BΓ, les deux ensemble, [est] relativement au carré sur AΓ, ainsi [est] le carré sur ΔE, EZ, les deux ensemble, relativement au carré sur ΔZ.	Et, pour cela, le rapport du carré résultant des deux lignes AB et BG, ajoutées, au carré résultant de AG est comme le rapport du carré résultant des deux lignes DE et EZ, ajoutées, au carré résultant de DZ.	Pour cela, le rapport qui résulte du produit de DE, EZ, <prises> ensemble, par elles-mêmes, à DZ par elle-même, est comme le rapport qui résulte du produit de AB, BG, <prises> ensemble, par elles-mêmes au produit de AG par elle-même[191].
(13)	Et, en longueur, comme [sont] AB, BΓ, les deux ensemble, avec AΓ ainsi [sont] ΔE, EZ, les deux ensemble, avec ΔZ[192].	Et, pour cela, le rapport des deux lignes AB et BG, ajoutées, à la ligne AG est comme le rapport des deux lignes DE et EZ, ajoutées, à DZ.	Et pour cela, le rapport de AB, BG, <prises> ensemble, à AG est comme le rapport de DE et EZ, <prises> ensemble, à DZ.

[189] Cette proportion triviale n'existe pas dans le compendium, mais on la trouve dans les autres versions. *GC* (428.25-31) ajoute une double *EPP* complètement inutile.
[190] Dans le ms d'*Ad. I,* cet argument est entre crochets. V. *Ad. I,* 385.332-335.
[191] Cette séquence (12) et le début de (13) existe dans *Ad. I,* 335-338 et *GC,* 428.41-48. Il y a clairement une lacune dans Téhéran 3586, mais pas dans Uppsala 321, ni dans Téhéran 200. Les assertions (12)-(13) manquent également dans le compendium qui enchaîne directement (11) et (14). Quand il fait ici référence (de manière instanciée) à II 8, les formulations de *GC* (re)deviennent géométriques (en accord avec sa propre formulation de *Él.* II 8) ! Les recensions d'al-Maghribī et de Campanus manipulent les proportions un peu différemment, mais le résultat utilisé (*Él.* II 8) est le même.
[192] À ce point de la démonstration il y a divergence entre ***M*** et ***PBVv*** ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], note complémentaire 5.4, pp. 151-152.

(14)	Par composition, comme [sont] AB, BΓ, les deux ensemble, avec AΓ relativement à AΓ — c'est-à-dire deux AB relativement à AΓ — ainsi [sont] ΔE, EZ, les deux ensemble, avec ΔZ relativement à ΔZ — c'est-à-dire deux ΔE — relativement à ΔZ.	Et si nous composons, le rapport des deux lignes AB et BG avec AG à AG est comme le rapport des deux lignes DE et EZ avec DZ à DZ.	Et si nous composons, le rapport de AB, BG, <prises> ensemble, avec AG, à AG, est comme le rapport de DE, EZ, <prises> ensemble, avec DZ, à DZ.
(15)		Or les deux lignes AB {et BG} avec AG c'est deux fois la ligne AB ; et les deux lignes DE et EZ avec DZ c'est deux fois DE[193].	—
(16)	Et les moitiés des antécédents, c'est-à-dire[194] :	Si on prend la moitié des antécédents,	—
(17)	comme [est] AB relativement à AΓ, ainsi [est] ΔE relativement à ΔZ.	le rapport de AB à AG est comme le rapport de DE à DZ.	Pour cela, le rapport de AB à AG est comme le rapport de DE à ZD.
(18)	—	—	Et si nous permutons, le rapport de AB à DE est comme le rapport de AG à DZ et comme le rapport de BG à EZ[195].
(19)	—	—[196]	Et il a donc été démontré que les situations qui adviennent à toute ligne divisée selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes, sont les mêmes[197].
(20)	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer.	Et c'est ce que nous voulions démontrer.

[193] Même formulation que Rabat pour (15) dans Escorial 907, la scholie VII *in GC,* 442.6-8 et le compendium. Cf. les scholies grecques 69-70.

[194] Variante : ***M*** (καὶ τὰ ἡμίση) \ ***PBVv*** (καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς τουτέστιν ...) ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 104, note 243. Cf. Rabat 1101, Escorial 907. La séquence (16) n'existe pas dans le compendium. Dans la scholie VII *in GC,* 442.9-10, on lit : « Cum ergo acceperimus medietatem proportionum, erit proportio … » ; il y aurait eu précisément confusion entre « moitiés des termes de la proportion » et « moitiés des antécédents ».

[195] Même double proportion ajoutée dans *Ad. I, GC,* mais pas dans le compendium.

[196] À la suite de (17), le compendium ajoute une conclusion générale en conformité avec son énoncé (407.10), mais pas de clause conclusive (CQVD). Ni conclusion générale, ni clause conclusive dans Escorial 907, ni dans la scholie VII *in GC.*

[197] Même conclusion générale, en conformité avec leur énoncé et, enfin, clause conclusive habituelle dans *Ad. I,* 385.340-345 et *GC,* 428.58–429.5.

<12> = [Récapitulations N°1][198]

(1)	Alors il a été démontré ceci[199] : qu'une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison, ce [rapport] que la droite pouvant produire le carré de la droite entière et celui sur le grand segment relativement à la droite pouvant produire le carré de la droite entière et celui sur le petit segment, ce même [rapport], le côté du cube l'a relativement au côté de l'icosaèdre.	Cela ayant été démontré, il apparaît que si on a une ligne droite quelconque et qu'elle est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance du carré de la ligne tout entière, avec le carré de la partie la plus grande de ses deux parties, à la ligne qui est en puissance du carré de cette ligne tout entière avec le carré de sa partie la plus petite, est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre.	Il a été démontré que pour toute ligne divisée selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance de la ligne et de sa partie la plus grande[200], à la ligne en puissance de la ligne et de sa partie la plus petite, est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère[201].
(2)	Or il a aussi été démontré ceci : que, comme le côté du cube [est] relativement au côté de l'icosaèdre, ainsi [est] la surface du dodécaèdre relativement à la surface de l'icosaèdre, ceux inscrits dans la même sphère,	{Il a été également démontré que le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre, inscrits dans une même sphère, est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre}[202].	Il a été également démontré que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, qui sont dans une même sphère, est comme le rapport du côté du cube, circonscrit par cette sphère, au côté de l'icosaèdre[203].
(3)	et il a aussi été ajouté ceci : que, comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, [ainsi] aussi [est] le dodécaèdre lui-même relativement à l'icosaèdre	Et il a été également démontré que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre,	Il a été également démontré que le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre, circonscrits par une même sphère, est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre.
(4)	à cause du fait qu'à la fois le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre sont compris par le même cercle,	parce que le cercle circonscrit au pentagone du dodécaèdre est égal au cercle circonscrit au triangle de l'icosaèdre.	—[204]

[198] Elles n'existent pas dans le compendium.

[199] Variante ***M*** (Καὶ) \ ***PBVv*** (δεδειγμένου δὴ τοῦδε) ; voir [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 2, p. 104, note 245. Rabat 1101 et la scholie VII *in GC* (Iam igitur declaratum …; ostensum …), la famille Téhéran 3586, *Ad. I, GC* sont plutôt en accord avec ***PBVv***.

[200] Les formulations de la "puissance" dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC,* ici et dans (5), censées correspondre à des citations non instanciées de XIV. 4, sont "linéaires", non conformes à l'usage euclidien (Df. X. 4) ; voir *supra,* note 147 (*iii*) et [Vitrac-Djebbar, 2011], II, A, § 3, p. 120, note 336 ainsi que la note complémentaire 5.3, pp. 149-151. Rabat 1101, Escorial 907 et la scholie VII *in GC* restent fidèles à l'usage euclidien.

[201] La famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* (mais ni Rabat 1101, ni la scholie VII *in GC*) ajoutent « inscrits dans une même sphère ». Le grec le fait seulement dans (2).

[202] Cette assertion, qui existe en amont dans le grec, en aval dans la scholie VII *in GC,* 442.19-23 manque dans Rabat 1101 (saut du même au même ?).

[203] L'ordre de présentation de la proportion est inversé dans la famille Téhéran 3586, Escorial 907, *Ad. I, GC* ($S_{12} : S_{20} :: a_6 : a_{20}$), mais pas dans la scholie VII *in GC*. Il s'agit de faire figurer le rapport ($S_{12} : S_{20}$) en première position, comme dans le rappel du résultat d'Apollonius (3), pour appliquer *Él.* V 11 sous la forme : « $R \equiv R_1$ et $R \equiv R_2 \rightarrow R_1 \equiv R_2$ », afin d'en déduire un rappel de XIV **5**.

[204] L'*EPP* existe dans la scholie VII *in GC* (442.27-30), dans Rabat 1101 (cercles égaux), mais ni dans la famille Téhéran 3586, ni dans Escorial 907, ni dans *Ad. I, GC*. En revanche ces versions combinent les assertions 2 et 3, ce qui produit (5) = XIV **5** ($V_{12} : V_{20} :: a_6 : a_{20}$). Cf. *Ad. I,* 386.357-360 ; *GC,* 430.5-9.

(5)	—	—	Il a été également démontré que le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre, circonscrits par la même sphère, est comme le rapport du côté du cube, circonscrit par cette sphère, au côté de l'icosaèdre.
(6)	il est évident que si, dans la même sphère, sont inscrits un dodécaèdre et un icosaèdre, ils auront comme rapport, celui qu'a — une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison —, la droite pouvant produire le carré de la droite entière et celui sur le grand segment relativement à la droite pouvant produire le carré de la droite entière et celui sur le petit segment[205].	Et il est clair que si on inscrit, dans une même sphère, la figure d'un dodécaèdre et la figure d'un icosaèdre, le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre est comme le rapport d'une ligne en puissance du carré d'une certaine ligne divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, avec le carré résultant de sa partie la plus grande, à la ligne en puissance du carré de cette ligne divisée avec le carré de sa partie la plus grande.	Il découle également de cela que pour toute ligne divisée selon le rapport ayant une moyenne et deux extrêmes, le rapport de la ligne en puissance de la ligne et de sa partie la plus grande, à la ligne en puissance de la ligne et de sa partie la plus petite, est comme le rapport du volume du dodécaèdre au volume de l'icosaèdre, circonscrits par une même sphère[206].
(7)	—	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer.
(8)	—	—	<Ici> s'achève le quatorzième livre d'Hypsiclès, ajouté au <traité> d'Euclide. Gloire et grâce à Dieu.

[205] La séquence « λόγον ἕξει εὐθείας ἡσδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης ὡς ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος. Τούτων δὴ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων δῆλον, ὅτι, ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον » est doublée dans le ms ***P***. Un saut rétrograde du même au même !

[206] L'ordre de présentation de la proportion est inverse dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC* : ($\partial_1 : \partial_2 :: V_{12} : V_{20}$), car on a appliqué *Él.* V 11 sous la forme :

$$(R_1 \equiv R \text{ et } R_2 \equiv R) \rightarrow R_1 \equiv R_2.$$

On ne rappelle pas l'hypothèse. Le texte grec, Rabat 1101 et la scholie VII *in GC* préfèrent exposer une chaîne d'identités de rapports du genre :

$$\text{« } (R_1 \equiv R_2,\ R_2 \equiv R_3,\ R_3 \equiv R_4) \rightarrow R_1 \equiv R_4 \text{ ».}$$

La même chose vaut dans les secondes récapitulations. Dans (6), Escorial 907 suit à nouveau la version Rabat 1101 (ordre, puissance sur des carrés).

[Récapitulations N°2]

(1) [207]	Alors toutes ces choses nous étant maintenant connues, il est évident que si, dans la même sphère, sont inscrits un dodécaèdre et un icosaèdre, le dodécaèdre, relativement à l'icosaèdre, aura comme rapport celui qu'a — une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison —, la droite égale, en puissance[208], à la droite entière et au grand segment relativement à la droite égale, en puissance, à la droite entière et au petit segment.	— [209]	—
(2)	Puisqu'en effet comme le dodécaèdre [est] relativement à l'icosaèdre, ainsi est la surface du dodécaèdre relativement à la surface de l'icosaèdre, c'est-à-dire le côté du cube relativement au côté de l'icosaèdre,	Et cela parce que le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre est comme le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre. Or, le rapport de la surface du dodécaèdre à la surface de l'icosaèdre est comme le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre.	—
(3)	et que, comme le côté du cube [est] relativement au côté de l'icosaèdre, ainsi [est] — une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison —, la droite égale, en puissance, à la droite entière et au grand segment relativement à la droite égale, en puissance, à la droite entière et au petit segment,	Et le rapport du côté du cube au côté de l'icosaèdre est comme le rapport de la ligne en puissance du carré d'une certaine ligne, quelle qu'elle soit, divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, avec le carré de sa partie la plus grande, au carré de toute cette ligne avec le carré de sa partie la plus petite.	—
(4)	donc, comme le dodécaèdre [est] relativement à l'icosaèdre — ceux inscrits dans la même sphère — [ainsi est] — une droite quelconque étant coupée en extrême et moyenne raison —, la droite égale, en puissance, à la droite entière et au grand segment relativement à la droite égale, en puissance, à la droite entière et au petit segment.	Donc le rapport du dodécaèdre à l'icosaèdre, qui sont inscrits dans une même sphère, est comme le rapport de la ligne en puissance du carré d'une certaine ligne, quelle qu'elle soit, avec le carré de sa partie la plus grande, si elle est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, au carré de cette ligne tout entière avec le carré de sa partie la plus petite[210].	—
(5)	—	Et c'est ce que nous voulions démontrer.	—[211]

[207] La formulation imite celle d'une Proposition dont l'énoncé correspond à ce qui vient d'être déclaré évident à la fin de la première récapitulation !

[208] Les formulations de la "puissance", ici et dans (3)-(4), contrairement à celles que l'on trouve dans les Récapitulations N°1, sont "linéaires" (voir *supra,* note 200). Rabat 1101 et la scholie VII *in GC* restent fidèles à l'usage euclidien.

[209] Cette première assertion des Récapitulations N°2 — qui n'est peut-être qu'une dittographie corrompue de l'assertion (**5**) des premières récapitulations — manque dans Rabat 1101, dans la scholie VII *in GC* et dans le compendium. Peyrard n'a pas maintenu ce "doublon" dans sa traduction et le rejette dans ses variantes de lecture, III, 611-612.

[210] Les séquences (2)-(4) constituent une sorte de preuve dont les "arguments" suivent l'ordre inverse de celui des récapitulations N°1. Elle est donc comparable à la dernière partie de la récapitulation de Rabat 1101, de la scholie VII *in GC,* 442.38-443.2 et au texte du compendium (407.11-18) :

> « puisque le rapport du solide a douze bases pentagonales au solide à xx bases triangulaires est aussi celui de la surface de l'un à la surface de l'autre, mais que le rapport des surfaces est celui du côté du cube au côté du solide à xx bases [cf. (2)], tandis que le rapport du côté du cube au côté du solide à xx bases est celui qu'a la droite pouvant produire le carré d'une droite coupée en extrême et moyenne raison et celui sur le grand segment relativement à la droite pouvant produire le carré de la même droite et celui sur le petit segment [cf. (3)], assurément le rapport de ces lignes sera le même que celui du solide a xii bases pentagonales au solide à xx bases triangulaires [cf. (4), mais en inversant l'ordre d'exposition, en abrégeant la désignation des lignes et sans la mention « ceux inscrits dans la même sphère »] ».

La scholie *GC* N°VII ajoute : « ce théorème est le dernier du Livre XIV ».

[211] Rappelons que dans *Ad. I* (386.366–367.413) suivent "deux" Propositions, XIV **13** et **13**^{bis}, correspondant à *GC* XIV **3** = Compendium, XIV 1, c'est-à-dire XIII 9bis.

TABLEAU 5 : Statistique par famille et par unités textuelles[212]

	Familles textuelles	Proposition ou Lemme											Total
		1	1→2	1/2	2	2/3	3	3/3aliter	3aliter	4	5	SEMR	
1	*M* / *PBVv* + Rabat + Téhéran 3586, *Ad. I, GC* + Compendium	—	—	**2**	—	—	**1**	—	—	—	—	—	**3**
2	*M* / *PBVv* + Rabat / Téhéran 3586, *Ad. I, GC* + Compendium	—	—	—	—	—	—	—	—	**1**	—	—	**1**
3	*M* + Rabat / *PBVv* + Téhéran 3586, *Ad. I, GC* + Compendium	—	—	—	**3**	—	—	—	—	—	—	—	**3**
4	*M* + Compendium / *PBVv* + Rabat / Téhéran 3586, *Ad. I, GC*	—	—	—	—	**1**	—	—	—	—	—	—	**1**
5	*M* + Téhéran 3586, *Ad. I, GC* + Compendium / *PBVv* + Rabat	**5**	**1**	—	**1**	—	—	—	—	**1**	—	—	**8**
6	*M* + Téhéran 3586, *Ad. I, GC* / *PBVv* + Rabat + Compendium	—	—	—	—	—	—	—	—	**1**	—	—	**1**
7	*M* + Téhéran 3586, *Ad. I* / *PBVv* + Rabat + *GC* + Compendium	—	—	—	—	**1**	—	—	—	—	—	—	**1**
8	*M* / *PBVv* + Rabat + *GC* + Compendium / Téhéran 3586, *Ad. I*	—	—	—	—	**1**	—	—	—	—	—	—	**1**
9	*M* / *PBVv* + Rabat + Compendium / Téhéran 3586, *Ad. I, GC*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	**4**	**4**
10	*M* / *PBVv* + Rabat + *GC* / Téhéran 3586, *Ad. I* + Compendium	—	—	**1**	—	—	—	—	—	—	—	—	**1**
11	*MPBVv* / Rabat + Téhéran 3586, *Ad. I, GC* + Compendium	—	—	—	**3**	—	—	—	—	—	—	—	**3**
12	*MPBVv* / Rabat + Téhéran 3586, *Ad. I, GC* / Compendium	—	—	**1**	—	—	—	—	—	—	—	—	**1**
13	*MPBVv* / Rabat + *Ad. I, GC* / Téhéran 3586 + Compendium	—	—	**1**	—	—	—	—	—	—	—	—	**1**
14	*MPBVv* + Rabat / Téhéran 3586, *Ad. I, GC* + Compendium	—	—	**7**	**4**	**2**	**4**	**1**	—	**2**	**1**	**3**	**24**
15	*MPBVv* + Rabat / Téhéran 3586, *Ad. I, GC* / Compendium	—	—	—	**1**	—	—	—	—	—	—	—	**1**
16	*MPBVv* + Rabat / Téhéran 3586, *Ad. I* + Compendium / *GC*	—	—	—	**1**	**2**	—	—	—	—	—	—	**3**
17	*MPBVv* + Rabat + Compendium / Téhéran 3586, *Ad. I, GC*	**8**	—	**6**	**11**	**16**	**15**	**23**	**10**	**13**	**8**	**10**	**120**
18	*MPBVv* + Rabat + Téhéran 3586 / *Ad. I, GC* + Compendium	—	—	—	**1**	—	—	—	—	—	—	—	**1**
19	*MPBVv* + Rabat + *GC* / Téhéran 3586, *Ad. I* + Compendium	—	**2**	**1**	—	—	—	—	—	—	—	—	**3**
20	*MPBVv* + Rabat + Téhéran 3586, *Ad. I* / *GC* + Compendium	—	—	**1**	—	—	—	—	—	—	—	—	**1**
21	*MPBVv* + Rabat + Téhéran 3586, *GC* / *Ad. I* + Compendium	—	—	—	**1**	—	—	—	—	—	—	—	**1**
22	*MPBVv* + Rabat + *GC* + Compendium / Téhéran 3586, *Ad. I*	—	—	—	—	**3**	**1**	—	—	**1**	—	—	**5**
23	*MPBVv* + Rabat + *Ad. I* + Compendium / Téhéran 3586, *GC*	—	—	**1**	**1**	—	—	—	—	—	—	—	**2**
24	*MPBVv* + Rabat + *Ad. I*, *GC* + Compendium / Téhéran 3586	—	—	—	**1**	—	—	—	—	—	—	**1**	**2**
25	*MPBVv* + Rabat + Téhéran 3586, *Ad. I* + Compendium / *GC*	—	—	—	**2**	—	—	—	—	—	—	—	**2**
26	*MPBVv* + Compendium / Rabat + Téhéran 3586, *Ad. I, GC*	**1**	—	**1**	**1**	—	—	**2**	—	—	—	—	**5**
27	*MPBVv* + *Ad. I* + Compendium / Rabat + Téhéran 3586, *GC*	—	—	—	—	—		—	—	**1**	—	—	**1**
28	*MPBVv* + *GC* + Compendium / Rabat + Téhéran 3586, *Ad. I*	—	—	—	—	—	**1**	—	—	—	—	—	**1**
	Total	**14**	**3**	**22**	**31**	**26**	**22**	**26**	**10**	**20**	**9**	**18**	**201**

[212] On indique pour chaque Proposition ou Lemme du Livre XIV le nombre de variantes discriminantes, chaque ligne représentant un groupement en familles textuelles séparées par le trait oblique. Par exemple, la première ligne dénombre celles qui distinguent le manuscrit grec ***M*** du reste du corpus, la ligne n° 17, celles qui distinguent la famille Téhéran 3586, *Ad.* I, *GC*. L'unanimité de la tradition directe contre l'ensemble des traditions indirectes médiévales, unanimes ou non, est représentée par la somme des lignes 11-12-13. Ni la préface, ni les premières, ni les secondes récapitulations ne sont prises en compte : la préface, car elle n'existe pas dans *Ad. I* et elle est différente dans le compendium, les premières récapitulations parce qu'elles n'existent pas dans le compendium, les secondes manquent dans la famille Téhéran 3586 + *Ad. I* + *GC*. Un bref commentaire de ce tableau a été proposé *supra*, à la fin du § III. 1.

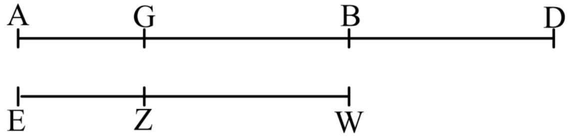
TABLEAU 6 : Comparaison de trois versions du Lemme XIII 9^{bis}

	XV 1 arabe[213]	**Scholie 25 (*M*)**	**Pappus, *Collectio* V, Lemme 11**
(1)	Si le côté de l'hexagone est divisé selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, sa partie la plus grande est le côté du décagone circonscrit par le cercle qui circonscrit l'hexagone.	Et si un côté de l'hexagone est coupé en extrême et moyenne raison, son plus grand segment est un côté du décagone, celui inscrit dans le même cercle que l'hexagone.	Et le côté de l'hexagone étant divisé en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est le côté du décagone.
(2)	**L'exemple de cela :**	—	—
	La ligne AB est le côté de l'hexagone et il a été divisé selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes au point G, et sa partie la plus grande est BG.	Soit AB un côté de l'hexagone et qu'il soit coupé en extrême et moyenne raison selon le point Γ, et que son plus grand segment soit AΓ.	En effet que de l'hexagone, le [côté] DB soit divisé en extrême et moyenne raison en G, et que DG soit le plus grand [segment].
(3)	Je dis que BG est le côté du décagone circonscrit par le cercle qui circonscrit l'hexagone dont le côté est la ligne AB.	Je dis que AΓ est un côté du décagone inscrit dans le même cercle que l'hexagone.	Je dis que DG est le [côté] du décagone.
(4)	**Sa preuve :**	—	—
(5)	Il a été démontré dans le treizième Livre que le côté de l'hexagone du cercle et le côté de son décagone, s'ils sont joints en alignement, puis que l'on divise la ligne qui résulte des deux selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes, la partie la plus grande est le côté de l'hexagone et la partie la plus petite est le côté du décagone[214].	—	—
(6)	Joignons à AB le côté du décagone et c'est DB.	Qu'un côté BΔ du décagone inscrit dans le même cercle que AB soit ajouté à AB.	Qu'y soit ajouté ΔA, le [côté] du décagone.
(7)	Donc, la ligne AD s'est divisée selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes au point B, et sa partie la plus grande est la ligne AB.	Et puisque AB est côté de l'hexagone, que BΔ est celui du décagone, ceux inscrits dans le même cercle, la droite AΔ entière est divisée en extrême et moyenne raison et son plus grand segment est AB ;	La [droite] AB a donc été divisée en extrême et moyenne raison en Δ.
(8)	—	donc, comme AΔ est relativement à AB, ainsi est AB relativement à BΔ.	—

[213] À noter que les manuscrits Téhéran 3586 et Rabat, si divergents dans leur Livre XIV, sont ici, à 3 ou 4 micro-variantes près, absolument identiques. Cette preuve est également celles d'Adélard I (XIV 13 et 13^{bis}), du compendium ainsi que la troisième (et dernière) de celles qu'en donne Campanus (495.126–496.141). Que cette Proposition n'ait pas été épargnée par la transmission se voit dans les variantes enregistrées dans le ms Uppsala 321, mentionnées *infra* dans les notes 216, 219-220. On remarquera également que les deux versions successivement compilées dans *Ad.* I sont quasiment identiques à l'exception de quelques variantes dans la formulation de l'énoncé [le premier est assertif (comme Pappus !), le second est conditionnel] et dans celle du rappel livresque (5) au livre XIII.

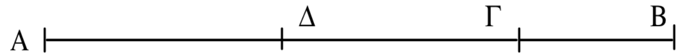
[214] Même référence livresque et *CNI* de XIII 9 dans *Ad. I, GC.* Elle n'existe pas dans le compendium.

(9)	Et nous supposons une ligne égale à la ligne AB et c'est EW, et nous la divisons au point Z selon le rapport d'une moyenne et de deux extrêmes. Sa partie la plus grande est WZ.	—	—



XV 1 arabe

Pas de diagramme *in* Scholie 25



Pappus, *Collectio* V, Lemme 11

(10)	Donc la ligne WZ est égale à la ligne BG.	—	—
(11)	Donc le rapport de AD à AB est comme le rapport de EW à WZ[215].	—	—
(12)	—	Alors, puisque AΔ est divisée en extrême et moyenne raison selon le point B et que son plus grand segment est AB, mais que AB est aussi divisée en extrême et moyenne raison selon le point Γ et que son plus grand segment est AΓ, donc, comme AΔ est relativement à BA, ainsi est AB relativement à AΓ.	Mais aussi ΔB en Γ` à cause du lemme 8, donc, comme AB est relativement à BΔ, c'est-à-dire BΔ relativement à ΔA, ainsi [est] BΔ relativement à ΔΓ.
(13)	—	Or il a été démontré que comme AΔ est relativement à AB, ainsi est AB relativement à BΔ ;	
(14)	—	donc, comme AB relativement à BΔ, ainsi est AB relativement à AΓ.	
(15)	Et, si nous séparons, le rapport de AB à BD est comme le rapport de WZ à ZE[216].	—	—

[215] On ne voit pas comment justifier cette proportion autrement que par un recours au Lemme SEMR, explicite dans la version de Pappus. Dans *GC* XIV 3 (416.46–417.29), on a cherché à éviter ce recours au Lemme SEMR : pour ce faire, on divise la ligne EW en Z, non pas en extrême et moyenne raison, mais dans le rapport de DB à BA et ensuite on montre qu'il s'agit d'une section en extrême et moyenne raison. On a DB : BA : EZ : ZW (par construction), d'où DA : AB :: EW : WZ (V 18). Or DA : AB :: AB : BD (XIII 9) donc AB : BD :: EW : WZ (V 11). Mais AB : BD :: WZ : ZE (V 7 Por.) ; donc EW : WZ :: WZ : ZE (V 11) et donc SEMR (EW) en Z. Au passage, on a démontré une sorte de converse du lemme SEMR : si on a SEMR [d] et si d' est coupée dans le même rapport, alors on a SEMR [d']. Rappelons que Gérard fait de même dans sa version de XIV **2** (= *GC* XIV 4) ; voir *supra,* Tableau 4, note 71.

[216] Ici divergence entre Téhéran 3586, Téhéran 200, Rabat 1101, d'une part et Uppsala 321, d'autre part. Dans ce manuscrit on a ajouté ici : « et WZ est comme GB, et EW comme AB, et ZE comme AG. Donc, le rapport de AB à DB est comme le rapport de GB à GA. La surface entourée par BA, AG est donc comme la surface de GB par BD. Mais la surface de BA par AG est comme le carré de GB Donc la surface de GB par BD est comme le carré de BG. Donc, BD est comme BG » ; la phrase soulignée (une simple substitution dans la chaîne d'égalités) est dans la marge droite.

(16)	Donc la surface[217] de AB par EZ est comme la surface de BD par WZ.	—	—
(17)	Et ce qui résulte de EW par EZ est égal à ce qui résulte de WZ par lui-même[218].	—	—
(18)	<Or AB est comme EW[219]. >	—	—
(19)	Donc la ligne DB est comme la ligne WZ,	Donc BΔ est égale à AΓ.	AΔ est donc égale à ΔΓ.
(20)	la ligne WZ est comme la ligne BG,	—	—
(21)	et DB est le côté du décagone.	Or BΔ est un côté du décagone ;	Or AΔ est le [côté] du décagone.
(22)	Donc, la ligne BG est le côté du décagone.	de sorte aussi que AΓ est un côté du décagone.	ΔΓ est donc le [côté] du décagone.
(23)	Et c'est ce nous voulions démontrer[220].	—	—

[217] Le texte (y compris dans Rabat 1101) ne dit pas « la surface qui résulte de AB par EZ (resp. BD par WZ) », mais « le carré (!) qui résulte de AB par EZ (resp. BD par WZ) ».

[218] Dans la version arabe et chez *Ad. I,* l'expression des égalités (**11-12**) est multiplicative ; dans le compendium, elle est géométrique.

[219] <> manque dans Téhéran 3586, Téhéran 200, Rabat 1101 et Escorial 907. Existe dans la marge gauche de Uppsala, 321, f°200. En combinant (15)-(16) et (17) : « donc la surface de BD par WZ est comme celle qui résulte de WZ par lui-même », d'où, en "simplifiant" (*Él.* VI 1), l'égalité (18).

[220] La dernière phrase : « et DB est le côté du décagone. Donc, la ligne BG est le côté du décagone. Et c'est ce nous voulions démontrer » est répétée en marge du manuscrit Uppsala 321, avec l'ajout suivant : « Et il dit aussi, après qu'il ait dit "le rapport de AB à BD est comme le rapport de WZ à ZE", le carré qui résulte de AB … est comme … ». De fait, il y a donc dans ce manuscrit la concaténation de *deux* preuves dans le texte principal et ses marges :
(*i*) la première substitue des égaux à WZ, ZE dans la proportion AB : BD :: WZ : ZE pour utiliser ensuite l'expression surfacique de la SEMR de AB en G ;
(*ii*) la seconde, qui est celle de Téhéran 3586, Téhéran 200 et Rabat 1101, fait d'emblée le « produit en croix » : Rect (AB, EZ) = Rect (BD, WZ) et utilise l'expression surfacique de la SEMR de EW en Z.
La fin des deux démonstrations est la même et se trouve de fait dupliquer dans Uppsala 321, une fois dans le texte, une fois en marge. Le copiste s'est rendu compte qu'il y avait là une variante (d'où l'ajout : « … Et il dit aussi … »), mais cela ne l'a pas empêché de compiler les deux preuves. Il faut supposer qu'il y avait un problème dans le texte initial. Il y en a trois autres indices : (*i*) la variante terminologique relevée à la note 217 ; (*ii*) l'expression surfacique de la SEMR de EW en Z est multiplicative et non géométrique, y compris dans le ms Rabat 1101, ce qui n'est pas conforme avec son mode habituel d'expression et (*iii*) la lacune qu'essaie de combler l'ajout (17), lacune qui n'a pas favorisé la compréhension du raisonnement.

7. Variantes dans les diagrammes du Livre XIV

Le lecteur trouvera ci-dessous un relevé de variantes diagrammatiques entre certains manuscrits des versions discutées dans notre article : les manuscrits grecs ***MPBV***[221], arabes Téhéran Malik 3586, Uppsala Universitetsbibliotek Tornberg 321, Rabat Hassaniyya (al-Malik) 1101, Escorial *ar.* 907[222], latins Bodl. *D'Orville* 70 et *BnF lat.* 7373, manuscrits uniques respectivement de la version dite Adélard I pour la portion X 36 – XV 2 et du compendium arabo-latin accompagnant la version gréco-latine [223]. Pour la version de Gérard de Crémone, passablement remaniée en ce qui concerne le Livre XIV, parmi les différents manuscrits utilisés par Busard, nous n'avons retenu que le seul Bruges, Stadsbibliotheek 521[224] ; outre les Livres I à XV, il contient aussi les scholies VI-VII (ff. 111*r*-112*r*).

Il y a bien des façons de comparer des diagrammes et on peut multiplier les critères. Nous en avons privilégié trois : (*i*) le tracé des lignes ; (*ii*) l'assignation du lettrage ; (*iii*) la disposition générale. Les deux premiers sont, en principe, déterminés par le texte, qu'ils soient exposés dans l'ecthèse de la Proposition ou introduits ultérieurement dans la phase de construction. Par conséquent, les divergences sont plus significatives que la conformité entre deux manuscrits puisque celle-ci est censée refléter le texte. A l'inverse, ce même texte ne dit rien de la disposition générale ; par exemple, dans XIV **2**, il y a un pentagone régulier, un triangle équilatéral et deux segments de droites, donc différentes façons de placer ces éléments les uns par rapport aux autres ; dans un tel cas, l'identité dispositionnelle est d'autant plus significative qu'il y avait plus de latitude dans le tracé du diagramme, comme on le voit, pour garder le même exemple de XIV **2**, entre ***P*** et ***B*** par opposition à ***M***, et dans une moindre mesure à ***V*** (voir les détails *infra*). Cette variabilité dispositionelle se manifeste notamment dans XIV **2** et **4**.

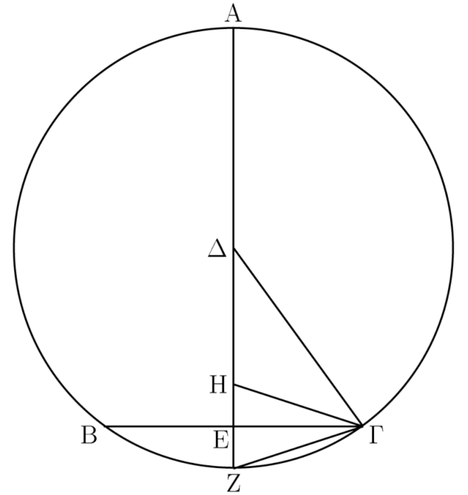
Il faut aussi admettre que certaines injonctions du texte ne sont pas nécessairement reflétées par les diagrammes et ceci se produit trop souvent pour s'expliquer seulement par les incertitudes de la transmission ou les maladresses des copistes. C'est notamment le cas avec les conditions d'ordre métrique. Dans notre petit échantillon[225], on s'est peu soucié de tracer des triangles "raisonnablement" équilatéraux ou des pentagones "réguliers" : le tracé des diagrammes dans les manuscrits n'est pas le lieu d'exercice des constructions euclidiennes, dans nos deux exemples le problème IV 11 ou le très élémentaire I 1. Dans plusieurs de nos Propositions, il est question de sectionner une droite en extrême et moyenne raison, donc dans un rapport déterminé de façon univoque (la construction en est expliquée à deux reprises et de deux manières différentes dans les Propositions II 11 et VI 30 des *Éléments*) ; les diagrammes transmis n'y prêtent pas attention : parfois le point de section est (bien trop) proche du milieu du segment.

---

221 Description sommaire dans [Vitrac-Djebbar, 2011], pp. 85-87.
222 Description sommaire *supra*, pp. 5-7.
223 Descriptions, respectivement dans [Adélard-Busard, 1983], pp. 26-27 et [Busard, 1987], pp. 21-23. Dans ces deux manuscrits, les diagrammes sont placés dans la marge externe.
224 Description dans [Gérard de Crémone-Busard, 1984], p. XXII. Les diagrammes, très soignés, sont placés à cheval dans la marge externe et dans une indentation modérée du texte qui, quand il s'agit d'une figure circulaire, suit la convexité de la figure d'une manière très esthétique.
225 Pour des études portant sur les diagrammes dans des corpus beaucoup plus importants, par exemple les Livres authentiques des *Éléments*, voir par exemple G. De Young, Diagrams in the Arabic Euclidean tradition: a preliminary assessment, *Historia Mathematica* 32 (2005), pp. 129-179 et K. Saito, A preliminary study in the critical assessment of diagrams in Greek mathematical works, *SCIAMVS* 7 (2006), pp. 81-144.

Dans la description des variantes qui suit, pour chacune des neuf ou dix assertions[226] accompagnées de diagrammes, nous introduisons un schéma “modernisé” afin d’aider le lecteur à comprendre les différences en question. Nous en donnons deux s'il y a une variante de lettrage *significative* entre la tradition grecque + Rabat (diagramme de gauche) et la famille Téhéran 3586 + Ad. I + GC (diagramme de droite).

XIV 1[227]

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Prescriptions textuelles

Ecthèse : exhiber un cercle ABΓ avec la droite BΓ = c_5 ; prendre son centre Δ ; établir le diamètre ΔZ perpendiculaire à BΓ qui passe donc par son milieu E[228].
Construction : jonctions de ΔΓ et ΓZ ; placer HE = EZ ; jonction de HΓ.

Tracés

Pas d’omission ou de variantes.
Notez toutefois que les conséquences de BΓ = c_5 et HE = EZ sont que ΔH = ΓZ = ΓH et que les triangles isocèles ΓΔZ, ΓZH sont semblables (cf. *Él.* IV 10 et *supra,* note complémentaire 5.1). Dans nos diagrammes, ceci n’est pas vérifié : soit BΓ est trop grand (pour que EZ soit bien visible ; exception possible ***V***), soit HE n’est pas égal à EZ (dans ***PV*** + Rabat + compendium + Téhéran + GC : EZ > HE ; dans Uppsala + Ad. I : EZ < HE), soit les deux, et, par conséquent, ΔH est toujours beaucoup trop petit.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Aucune variante de lettrage

Disposition

Aucune variante, sauf symétrie droite / gauche entre Grec + Téhéran + Rabat + compendium et Escorial 907 + Ad. I + GC</td>
</tr>
</table>

[226] La possible variation d’une unité dans le total tient à ce qu’une partie de la tradition textuelle transmet le Lemme **2/3** <**a**>+<**b**> comme une seule unité, accompagnée d’un diagramme “double” (pentagone + triangle), tandis que l’autre le traite comme deux propositions successives.
[227] *Errata* dans [Vitrac-Djebbar, 2011], p. 91 et p. 107 : le tracé de la ligne ΓZ a été omis.
[228] Nous ne cherchons pas ici à reproduire la littéralité du texte, mais simplement à énumérer brièvement la suite des opérations graphiques nécessaires à la réalisation du diagramme. Dans cet exemple, le texte dit d’abaisser la perpendiculaire ΔE puis de la prolonger vers A, Z.

XIV 1/2[229]

Prescriptions textuelles

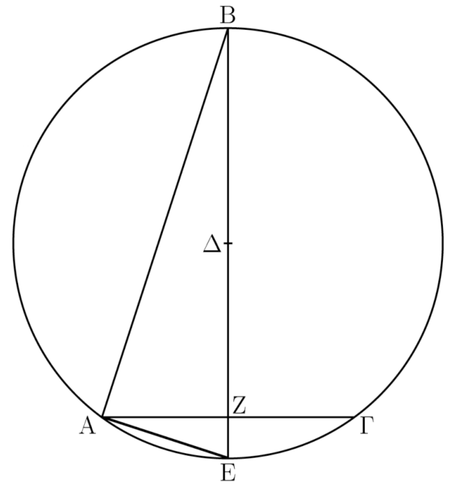
Ecthèse : exhiber un cercle ABΓ avec la droite AΓ = c_5 ; prendre son centre Δ ; établir le diamètre BE perpendiculaire à AΓ qui passe donc par son milieu Z ; jonction de AB.
Construction : jonctions de AE = c_{10}.

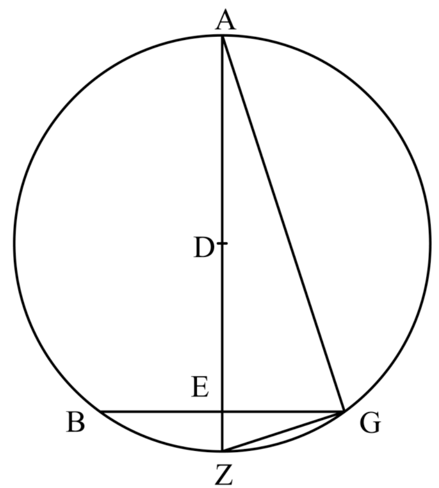
Tracés

Aucune variante sinon que le centre D n'est pas visible dans l'Escorial

Deux lettrages :

Grec + Rabat (A, B, Γ, Δ, E, Z) + Escorial (A, B, G, —, E, Z) \ Famille Téhéran + Ad. I + GC + Compendium (g, a, b, d, z, e)





Disposition
symétrie droite / gauche dans le *tracé* du triangle rectangle (ABE, GAZ) entre traditions directe et indirecte

229 *Errata* dans [Vitrac-Djebbar, 2011], p. 92 et p. 109 : le point Z milieu de AΓ a été omis.

XIV 2[230]

Prescriptions textuelles

Ecthèse : exhiber un segment AB (diamètre d'une sphère), un pentagone ΓΔΕΖΗ du dodécaèdre et ΚΛΘ un triangle de l'icosaèdre inscrits dans ladite sphère.
Construction : jonction de ΔΗ ; exhiber un segment MN vérifiant $AB^2 = 5MN^2$; sectionner MN en extrême et moyenne raison en Ξ, avec MΞ > ΞN.

Tracés

Des cercles circonscrits au pentagone et au triangle existent seulement dans ***M***
Le pentagone pas clairement tracé [(ΔΕ, ΖΗ) non visibles] dans ***M***

N.B. : On a prescrit $AB^2 = 5MN^2$, donc AB > 2MN. Ceci n'est jamais vérifié :
AB > MN dans ***M***(?)***BV*** + Téhéran, Uppsala, Ad. I + GC + compendium \ AB = MN dans ***P*** + Rabat
En outre, AB est juste un peu plus grande que MN : l'échelle n'est pas respectée.

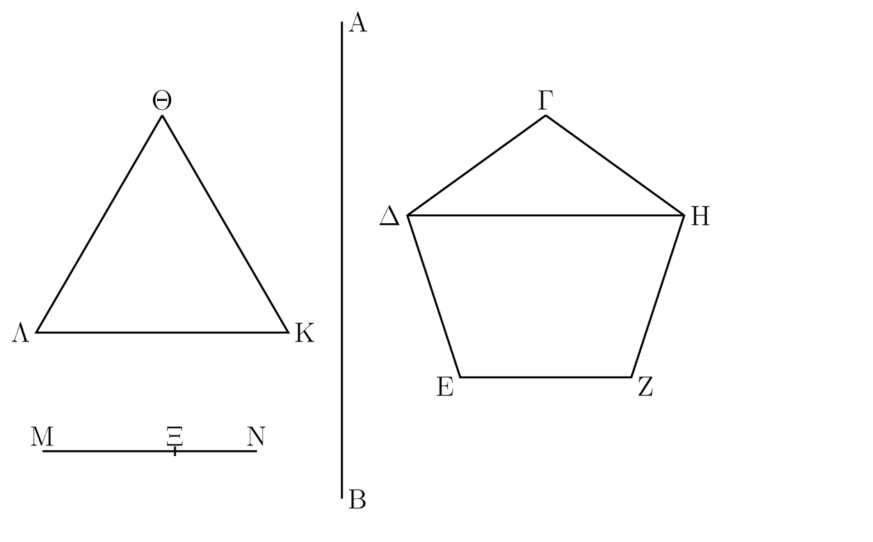
Lettrage[231]

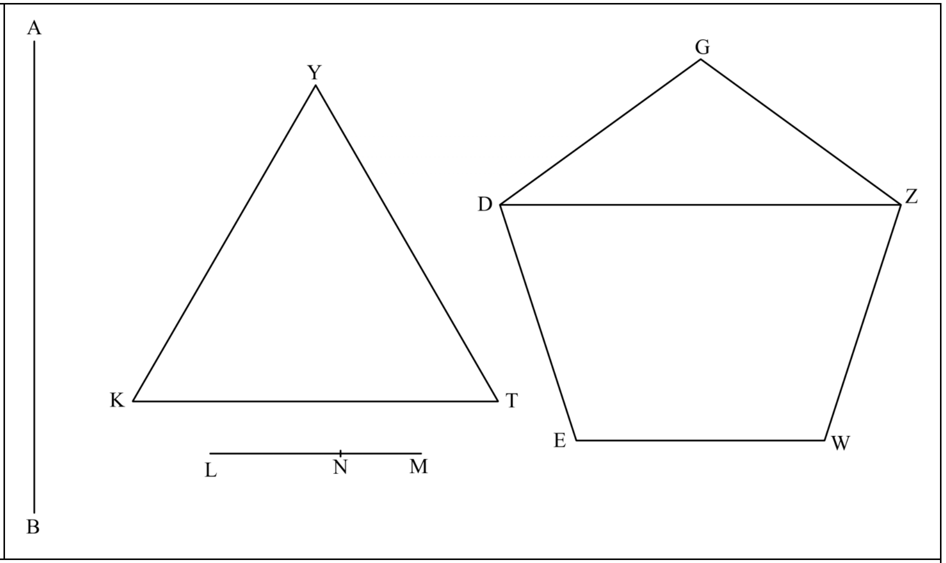
Deux lettrages pour le pentagone :
MPBV + Rabat + Escorial + compendium (ΓΔΕΖΗ, resp. *gdezh*) \\ Famille Téhéran (GZWED) + Ad. I (*gzuhd*) + GC (*gzued*)

Lettrages du triangle :
M + Escorial (ΘΚΛ, resp. TKL) \ ***PB***(ΘΛΚ) \ ***V*** + Rabat + compendium (ΚΛΘ, resp. *klt*) \\ Famille Téhéran (YTK) + GC (*btk*) \ Ad. I (*ftr*)

Quatre lettrages de la droite auxiliaire (dont 2 principaux) :
M(?)***PB***(MNΞ) \ Famille Téhéran + Ad. I + GC (MNL) \\ ***V*** (MΞN) \ Rabat + Escorial (MSN) [*mcn* dans compendium].
Le sens du texte exige que M et N soient les extrémités du segment (comme dans ***V*** + Rabat + Escorial + compendium) !

[230] *Erratum* dans [Vitrac-Djebbar, 2011], p. 110 : le diagramme reproduit celui de la page 94 (inspiré de ***P***) ; comme lui, il permute les lettres N et Ξ.
[231] Quand nous percevons deux niveaux de divergence dans les lettrages, nous les distinguons en utilisant la double barre oblique (//) pour l'opposition principale, la barre simple (/) pour la variante moindre.



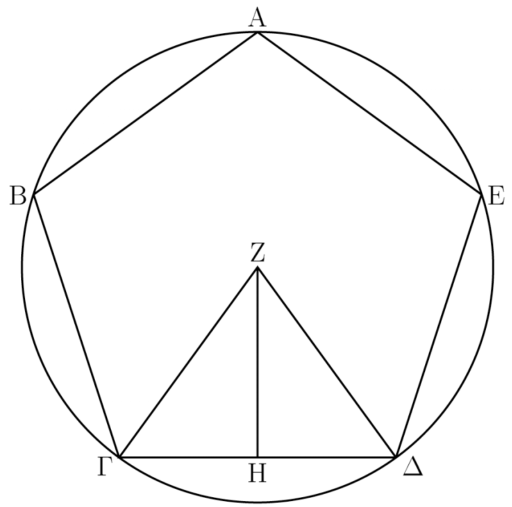


Disposition des figures du diagramme
pentagone à gauche–triangle à droite (***M*** + Rabat + compendium) \ pentagone à droite–triangle à gauche (***PBV*** + Téhéran + Ad. I + GC + Escorial)

Disposition des lignes AB, MN :
M (AB, MN horizontales sous le schéma, AB sous MN, à la limite de la rognure de la page)
\ ***PB*** (AB verticale séparante, MN horizontale sous triangle)
\ ***V*** (AB, MN horizontales au-dessus du triangle)
\ Téhéran (AB verticale à gauche, MN horizontale sous le triangle) \ Uppsala (AB, MN verticales à gauche du schéma)
\ Rabat + Ad. I + GC + compendium (AB, MN horizontales sous le schéma, superposées dans Rabat + Ad. I + GC, juxtaposées dans le compendium)
\ Escorial (AB horizontale au dessus du schéma, MN verticale séparante)

Disposition générale
symétrie droite / gauche entre Rabat + compendium et ***V*** pour le lettrage et la disposition des figures
Elle vaut pour l'ensemble du lettrage dans Rabat, mais pas pour celui des lignes dans le compendium.
symétrie droite / gauche entre Escorial et ***M*** pour le lettrage et la disposition des figures (pas les lignes)
Dans Famille Téhéran + Ad. I + GC, à cause des variantes de lettrage, la symétrie dr. / g. p/r au grec (***MPB***) ne vaut que pour la droite MNΞ (MNL) !

XIV 2/3 <a>[232]



Prescriptions textuelles

Ecthèse : exhiber un pentagone régulier ΑΒΓΔΕ et son cercle circonscrit ΑΓΔ ; prendre le centre du cercle Z ; mener la perpendiculaire ZH sur ΓΔ.
Construction : jonctions de ΓZ, ZΔ.

Tracés

Cinq rayons ZA, ZB, ZΓ, ZΔ, ZE sont tracés dans ***PB*** + Famille Téhéran + compendium
\ Deux seulement, ZΓ, ZΔ (comme le dit le texte !) dans ***MV*** + Rabat + Escorial + Ad. I + GC

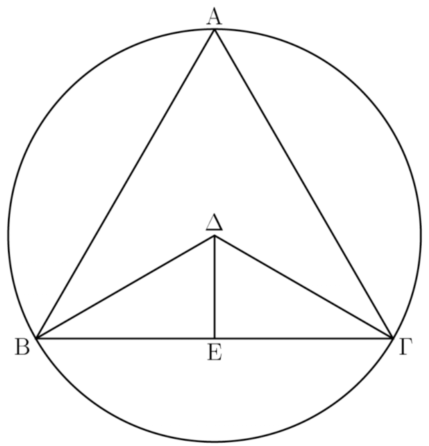
Lettrage

Aucune variante de lettrage

Disposition

symétrie droite / gauche entre Grec + Ad. I + GC et famille Téhéran + Rabat + Escorial
symétrie haut / bas entre compendium et grec ***PB***

XIV 2/3 <b>



Prescriptions textuelles

Ecthèse : exhiber un triangle équilatéral ΑΒΓ et son cercle circonscrit ; prendre le centre du cercle Δ ; mener la perpendiculaire ΔE sur ΒΓ. Pas de construction, en particulier pas de jonction.

Tracés

La ligne EΔ est prolongée jusqu'en A dans ***PB*** + Famille Téhéran + Ad. I + compendium, mais pas dans ***MV*** + Rabat + Escorial + GC

Lettrage

Aucune variante de lettrage

Disposition

Symétrie droite / gauche entre traditions directe et indirecte (y compris le compendium)

[232] Les diagrammes XIV **2/3 <a>, <b>** sont conjoints dans ***MPB*** + Rabat (1 seule unité textuelle) \ disjoints dans ***V*** + famille Téhéran + Ad. I + GC + Escorial + compendim, mais ***V*** traite l'ensemble textuel comme un seul Lemme, tandis que cette branche de la tradition indirecte en fait deux Propositions indépendantes. Voir *supra,* tableau 4, notes 93, 96.

XIV 3[233]

Prescriptions textuelles

Ecthèse : exhiber un cercle ΑΒΓ, circonscrit à la fois au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère ;
y inscrire ΓΔ = a_{20} = c_3 et ΑΓ = a_{12} = c_5 ; prendre le centre Ε ; mener les perpendiculaires ΕΖ, ΕΗ à ΔΓ, ΓΑ ; prolonger ΕΗ jusqu'en Β ; joindre ΒΓ ; exhiber Θ = a_6. Pas de construction[234] !

Tracés

La droite auxiliaire Θ n'est plus ou pas visible dans ***MB***
\ elle est à droite du cercle dans ***PV*** + Famille Téhéran + compendium \ à gauche dans Rabat + Escorial + Ad. I + GC

EZ horizontale dans ***M*** tracée non perpendiculaire à ΓΔ, pour être distinguée de EHB
\ verticale dans ***PBV*** + Rabat + compendium + Famille Téhéran (DE) + Ad. I (*dh*) + GC (*de*) \ oblique et non perpendiculaire dans Escorial.

3 cordes issues de Γ, obliques dans ***M***
/ 3 cordes issues de Γ, dont ΓΔ ≈ horizontale dans ***PBV*** + Rabat + compendium
/ 3 cordes issues de A dans Famille Téhéran + Ad. I + GC, dont AB (*ba*) ≈ horizontale (*i.e.* ΓΔ dans le lettrage grec)
/ 3 cordes issues de A, dont AG ≈ horizontale (*i.e.* ΑΓ dans le lettrage grec) dans Escorial.

Erreur dans le placement de H (sur ΔΓ au lieu de ΑΓ) dans ***M***.
EZ prolongée jusqu'en G dans Escorial (*i.e.* Α dans le lettrage grec)

Deux lettrages principaux avec une variante :

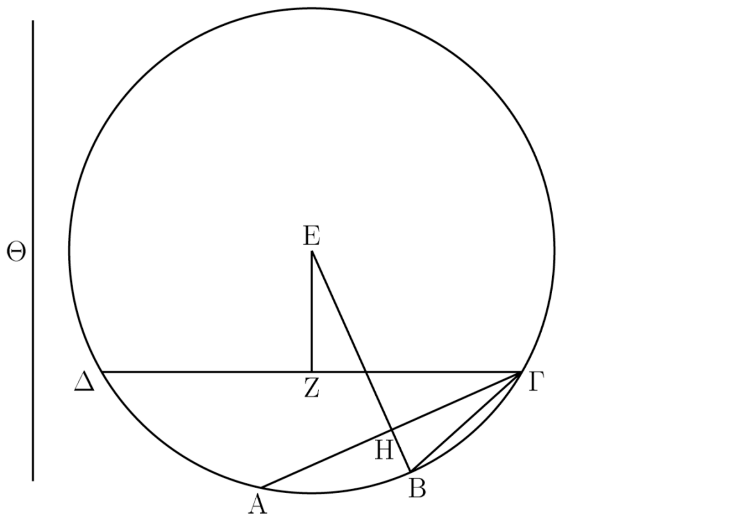
Grec + Rabat + compendium (Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ) + Escorial (G, B, A, D, E, Z, H, T) \\ Famille Téhéran + *Ad. I* + *GC*
[G, W (*u in Ad. I* + *GC*), A, B, D, E (*h in Ad. I*), Z, T)
Variante dans Escorial : échange A / G

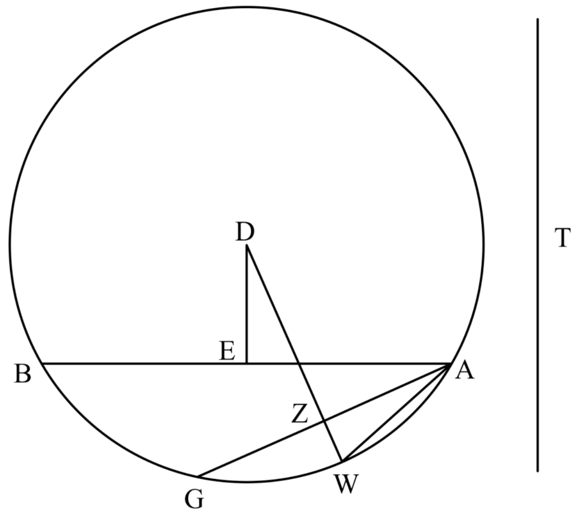
Disposition

symétrie droite / gauche complète entre grec ***PBV*** et Rabat
Même symétrie droite / gauche pour la figure circulaire dans le compendium, malgré la droite auxiliaire à droite !

[233] *Errata* dans [Vitrac-Djebbar, 2011], p. 97 et p. 113 : la droite auxiliaire Θ a été omise.

[234] Vu l'énoncé [surf.(dod.) : surf.(icos.) :: a_6 : a_{20} :: Θ : ΓΔ], il était facile d'intercaler le diorisme (« Je dis que comme la surface du dodécaèdre [est] relativement à la surface de l'icosaèdre, ainsi est Θ relativement à ΓΔ ») avant la prise du centre – mais après avoir "exhiber" Θ – pour respecter l'architecture "habituelle" d'une Proposition.





XIV 3/3aliter

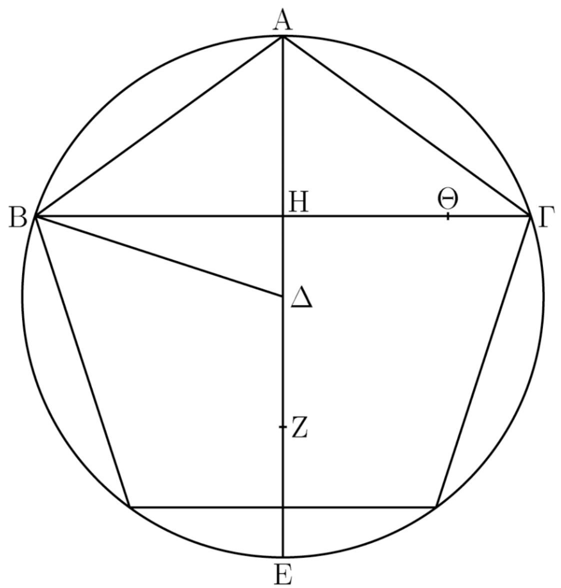
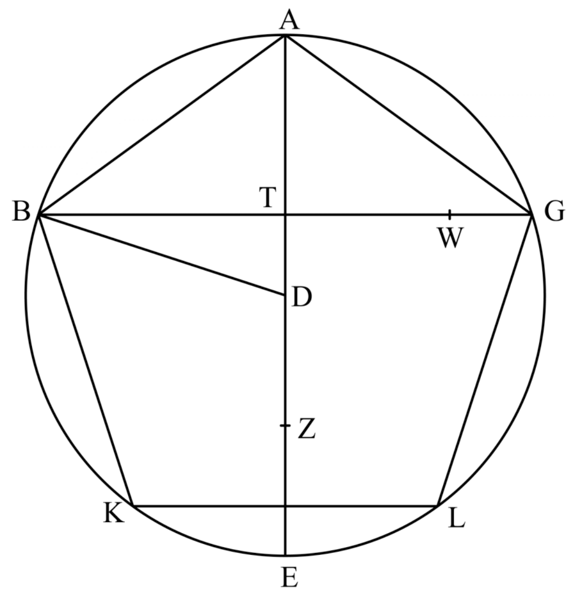
Prescriptions textuelles

Ecthèse : exhiber un cercle ABΓ et AB = AΓ = c_5 ; jonction de BΓ ; prendre le centre Δ ; joindre AΔE ; placer ΔZ moitié de AΔ ; et que HΓ = 3ΓΘ.
Construction : jonction de BΔ.

Tracés

Pas de diagramme visible dans ***M*** (indentation vide à la fin du lemme XIV **3**/**3***aliter*–début de XIV **3***aliter*)
\ Dans ***PB*** (*quasi* carré surmonté d'un triangle isocèle pour représenter le pentagone)[235]
\ ***V*** + compendium [partie triangulaire utile (ABΓ) du pentagone, dont seulement 2 côtés (AB, AΓ), comme le dit l'énoncé !]
\ Famille Téhéran + Rabat + Ad. I + GC (pentagone)
\ Escorial (partie triangulaire utile (ABG) du pentagone + une droite horizontale passant par Z, parallèle et à peu près égale à BG (!), donc symétrique par rapport au centre. Cf. XIV **3***aliter*).
Tous les diagrammes ont la diagonale BΓ, le diamètre AE et le rayon du cercle ΔB.

[235] Voir [Vitrac-Djebbar, 2011], p. 99.

<table>
<tr><td colspan="2">2 lettrages (en fait une simple variante ?) :
Grec + Rabat + Escorial + compendium \ Famille Téhéran + Ad. I + GC
(A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, —, —) \ (A, B, G, D, E, Z, T [mal placé (à la place de H)], W [(u dans Ad. I + GC) à la place de T], K, L)
Dans le ms Téhéran la lettre "E" (ha) est utilisée une seconde fois à l'intersection de AE (!) et KL.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Disposition
symétrie haut / bas entre compendium et grec V
symétrie haut / bas entre Ad. I + GC et famille Téhéran</td></tr>
</table>

XIV 3aliter

Prescriptions textuelles

Ecthèse : exhiber un cercle ΑΒΓ, circonscrit à la fois au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère, y inscrire ΒΑ = ΑΓ = c_5 ; jonction de ΒΓ ; prendre le centre Ε ; joindre ΑΕΖ ; que ΑΕ = 2ΕΗ et ΚΓ = 3ΘΓ ; mener la perpendiculaire ΔΗΜ à ΑΖ.
Construction[236] : joindre ΑΔ, ΔΜ.

Tracés

Pas de diagramme visible, ni d'indentation dans ***M***
\ ***P*** (*quasi* carré surmonté d'un triangle isocèle pour représenter le pentagone[237] ; triangle "équilatéral")
\ ***B*** (*quasi* carré + triangle pour pentagone, comme ***P***, mais erreur de jonction des côtés du triangle "équilatéral" aux autres sommets, non lettrés, du pentagone)
\ ***V*** + compendium (partie triangulaire utile (ΑΒΓ) du pentagone, triangle "équilatéral")
\ Famille Téhéran + Ad. I + GC + Rabat (pentagone, triangle "équilatéral")
\ Escorial (partie triangulaire utile du pentagone + une droite horizontale passant par H, parallèle et à peu près égale à la diagonale du pentagone, donc symétrique par rapport au centre : base du triangle "équilatéral" ? Cf. XIV **3**/**3***aliter* !)
Tous les diagrammes ont le diamètre vertical

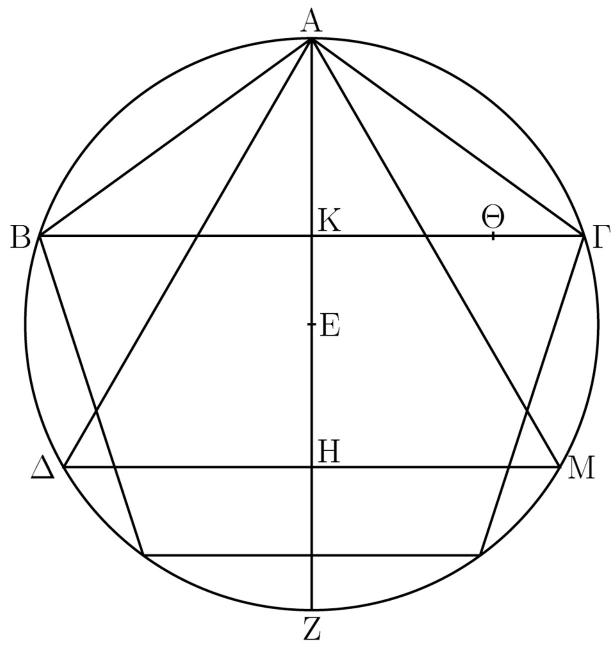
5 lettrages dont 3 principaux :

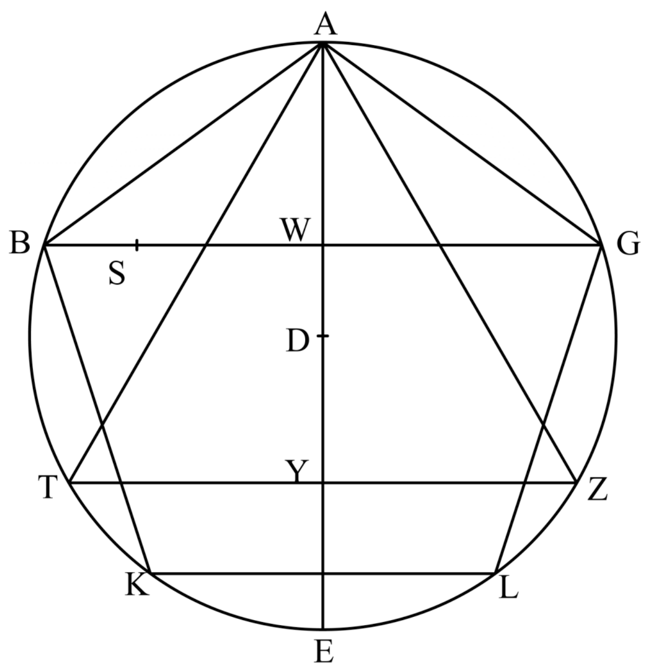
P (Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, —, —, Μ) \ ***B*** (Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, —, —, Θ) \ ***V*** + Rabat + compendium (Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Μ)
[D'où une incompatibilité entre texte et diagramme dans ***B*** !]
\\ Famille Téhéran [A, B, G, T, D, E (*f in* GC, *h in* Ad. I), Y (*h in* GC, *f in* Ad. I), S, W (*u in* Ad. I+GC), Z ; points supplémentaires K, L]
\\ Escorial (A, B, D, T, E, G, H, —, —, K).

Disposition

symétrie droite / gauche entre compendium et grec ***V***
symétrie droite / gauche pour le lettrage entre Rabat et grec ***P***

[236] Nous introduisons cette distinction, mais il faut noter qu'à la fin de l'"ecthèse", on trouve, non pas le diorisme habituel, mais une assertion : « ΔΜ est donc le [côté] d'un triangle équilatéral » à l'indicatif qui interrompt la séquence des impératifs, d'où notre distinction.
[237] Voir [Vitrac-Djebbar, 2011], p. 100.





XIV 4

Prescriptions textuelles

Ecthèse : exhiber un cercle AΘB, circonscrit à la fois au pentagone du dodécaèdre et au triangle de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère ; prendre le centre Γ ; mener un rayon ΓB ; sectionner ΓB en extrême et moyenne raison en Δ, avec ΓΔ > ΔB. Exhiber E = a_{20}, Z = a_{12}, H = a_6.
Pas de construction[238].

N.B. : On a prescrit SEMR (ΓB) avec ΓΔ > ΔB.
Ceci n'est vérifié ni dans ***P*** (ΓΔ < ΔB !), ni dans ***V*** + Téhéran (ΓΔ ≈ ΔB).
L'inégalité est représentée dans ***B*** + Rabat + compendium + Ad. I + GC + scholie VI in GC

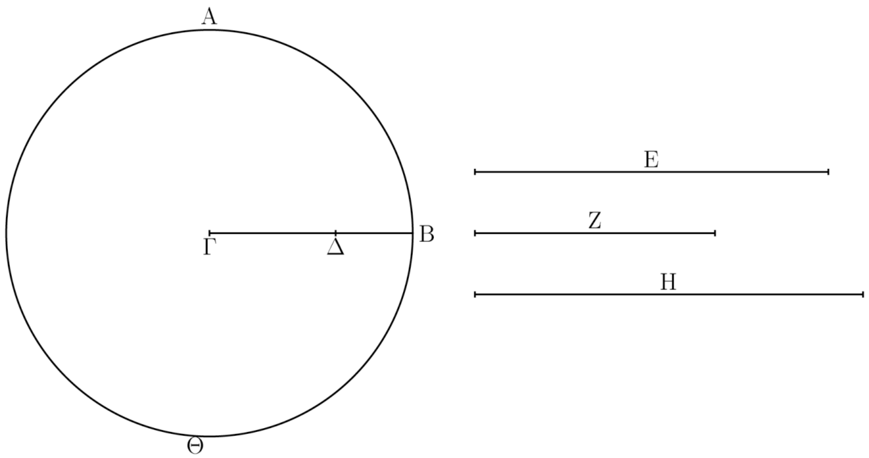
[238] Nous aurions pu faire le même choix que pour la Proposition précédente en reversant l'exhibition des trois droites E, Z, H à la construction, car elle est séparée du sectionnement en extrême et moyenne raison par une assertion : « ΓΔ est donc le côté du décagone inscrit dans le même cercle » à l'indicatif qui interrompt, là aussi, la séquence des impératifs. Mais, dans XIV **3**, on trouvait le verbe "ἐπεζεύχθωσαν" (joindre) tandis qu'ici on a seulement "ἐκκείσθω" (proposer) qui n'implique pas vraiment une construction.

2 tracés :

Cercle avec rayon + 3 segments de droites \ + 5 segments de droites
(***PBV*** + Rabat + scholie VI in GC + compendium) \ Famille Téhéran + Ad. I + GC + Escorial)
Pas de diagramme visible dans ***M***, mais indentation vide à la fin de XIV **4**–début de XIV **5**.

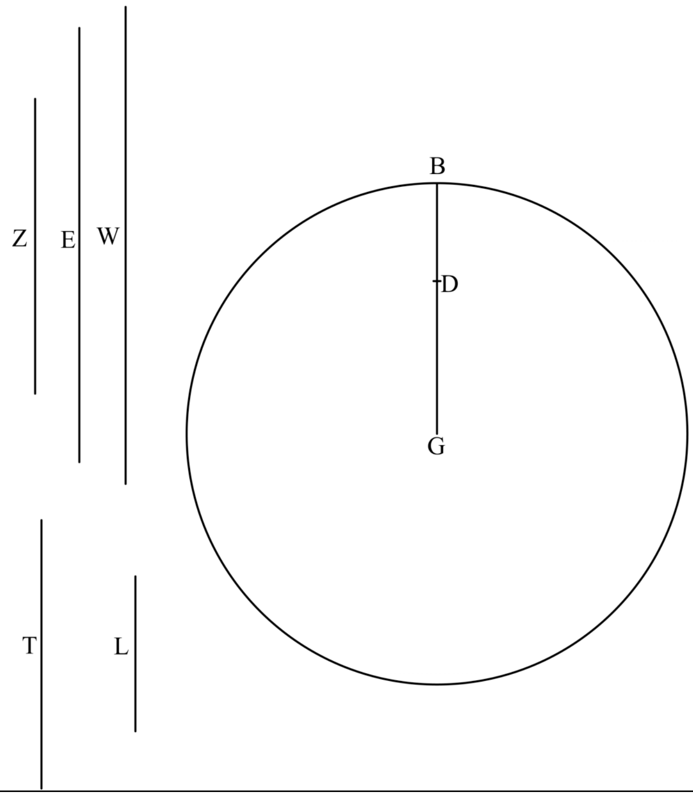
3 lettrages (dont deux principaux, correspondant aux deux tracés) et une variante :

Grec (Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η) \ Rabat + compendium (—, B, G, D, E, Z, H)
\\ Famille Téhéran + Ad. I + GC (A, B, G, D, E (*h in* Ad. I), Z, W (*u in* Ad. I + GC), T, L), A manque dans Téhéran, mais pas dans Uppsala, GC, Ad. I)
\\ Escorial (—, G, B, D, E, Z, H, T, K)



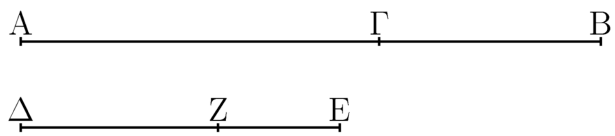
Multiples dispositions

1) Grec [rayon horizontal, 3 segments horizontaux
avec identifications (Κ ΕΔΡΟΝ, ΙΒ ΕΔΡΟΝ, ΚΥΒΟΥ).
Dans ***P*** les segments sont à peu près égaux \ dans ***BV*** le segment *z* est plus petit) ;
2) Rabat + compendium (rayon horizontal, 3 segments verticaux sans identifications),
ordonnés par taille décroissante (*h, e, z*) dans Rabat,
égaux et par ordre alphabétique (*e, z, h*) dans le compendium ;
3) scholie VI in GC (rayon vertical vers le bas, 3 segments verticaux sans identifications,
égaux et dans l'ordre alphabétique (*h, z, e*) ;



4) Famille Téhéran + Escorial + GC (rayon vertical, 5 segments verticaux sans identifications avec dispositions différentes
dans Téhéran 3586, Uppsala, Escorial + GC), dans GC les segments sont ordonnés par taille décroissante (*u, e, z, t, l*)
5) Ad. I [rayon vertical, 5 segments horizontaux sans identifications ; les 5 segments sont ordonnés par taille décroissante (*h, z, u, t, l* ≠ in Busard)].

Lemme SEMR

<table>
<tr><td colspan="2">Prescriptions textuelles
Ecthèse : exhiber un segment de droite AB, sectionné en extrême et moyenne raison en Γ, avec AΓ > ΓB et un autre segment de droite ΔE, sectionné en extrême et moyenne raison en Z, avec ΔZ > ZE.
Pas de construction.</td></tr>
<tr><td></td><td>2 tracés :
PBV + Rabat + Famille Téhéran (deux droites avec SEMR) \ Escorial (deux droites avec SEMR + prolongements)
Pas de diagramme visible, ni indentation dans M ; pas de diagramme dans le compendium
Lettrage : Pas de variante de lettrage</td></tr>
<tr><td colspan="2">Multiples dispositions,

1) PB (AB ≈ ΔE ; Γ, Z à peu près au milieu de AB, ΔE)
2) V (AB ≈ ΔE ; AΓ ≈ ΔZ > ΓB ≈ ZE)
3) Rabat + GC (symétrie droite / gauche par rapport à V)
4) Famille Téhéran + Ad. I [AB ≈ DE (dh in Ad. I) ; pas de symétrie droite / gauche pour AB, DE (dh in Ad. I) par rapport au grec type V, mais AG ≈ DZ < GB ≈ ZE (zh in Ad. I), i.e. une sorte de symétrie pour le placement des points G, Z]
5) Scholie VII in GC (ab > de ; symétrie droite / gauche par rapport au grec PB pour le lettrage avec g, z à peu près au milieu, mais la ligne dze est au dessus de abc)
6) Escorial (AB ≈ DE ; symétrie droite / gauche pour AB, DE par rapport au grec type V, mais AG ≈ DZ < GB ≈ ZE, situation inverse de celle de la Famille Téhéran !)</td></tr>
</table>

En résumé, l'étude des diagrammes corrobore les analyses que nous avons pu faire au niveau du texte et elle permet l'introduction de nouveaux clivages ou parentés, notamment grâce aux variantes dispositionnelles. Il y a très peu de divergences de lettrages dans la tradition directe, ce qui confirme que nous n'avons qu'un "seul" texte grec. Les tracés offrent une plus grande variété et la plus significative est peut-être celle du couple XIV **3**/**3***aliter*–**3***aliter*, avec trois types de diagramme assez distincts ; l'utilisation d'un *quasi* carré surmonté d'un triangle isocèle pour représenter le pentagone régulier ne se trouve pas dans les autres Propositions du Livre XIV et pourrait confirmer leur appartenance initiale à une autre tradition textuelle.

Si on considère globalement les traditions directe et indirecte, on constate que, sur 9 ou 10 diagrammes, 3 ou 4 d'entre eux (XIV **1**, **2/3**[239] et Lemme SEMR[240]) ne présentent aucune variante de lettrage. Pour les six autres (en laissant de côté la symétrie « droite / gauche » habituelle et, parfois, des tracés manquants ou devenus invisibles sur les reproductions des manuscrits), la famille du manuscrit Téhéran 3586 se distingue systématiquement du grec quant au lettrage et, il faut le souligner, *Ad. I* et *GC* sont toujours en accord avec cette famille [on peut juste relever une variante dans Ad. I pour le lettrage du seul triangle équilatéral de XIV **2**, un petit écart de tracé entre la famille du manuscrit Téhéran 3586 et *Ad. I* et *GC* (resp. le seul *GC*) dans XIV **2/3**<a> (resp. <b>)]. Malgré le considérable enrichissement textuel de la version de Gérard, malgré ses emprunts ponctuels à l'autre branche de la tradition indirecte quand celle-ci s'avère plus complète, les pratiques diagrammatiques d'Adélard et de Gérard sont très proches. Dans ces six diagrammes, le lettrage du manuscrit Rabat 1101 correspond à celui du grec ; cela vaut aussi pour le tracé – sauf dans XIV **3**/**3***aliter*[241] – et on remarquera que le manuscrit grec dont Rabat est le plus proche est ***V***, mais cela tient peut-être à des corrections indépendantes similaires pour d'évidentes incongruités de ***PB*** (erreur pour la ligne auxiliaire dans XIV **2** ; tracés "exotiques" dans XIV **3**/**3***aliter*–**3***aliter*).

Le manuscrit Escorial 907 montre un peu plus d'indépendance, mais son lettrage est substantiellement le même que celui de Rabat 1101 et du grec dans XIV **1**, **1/2**, **2**, **2/3**, **3**, **3**/**3***aliter*, autrement dit dans une importante portion initiale du Livre. Celui de XIV **3***aliter*, **4** et du Lemme SEMR[242] lui sont propres. Quant au compendium, ses diagrammes sont souvent proches de ceux de la tradition directe ou, ce qui revient au même, de ceux du manuscrit Rabat 1101 : dans XIV **2/3**, le compendium a le même diagramme que le grec ***PB***, après symétrie « haut / bas» dans <a>, symétrie « droite / gauche » dans <b> ; ses diagrammes de XIV **1**, **2**, **3**, **3***alit,* **4**, sont quasi identiques à ceux de Rabat 1101 et celui de XIV **3**/**3***aliter* a le même lettrage, mais présentent des différences de tracé (qui est celui de ***V*** et proche de l'Escorial !). Son seul "écart" réside dans XIV **1/2** : son diagramme est celui de la famille Téhéran 3586, *Ad. I, GC,* avec des incidences sur le texte, puisqu'on observe une modifications du lettrage : (A, B, Γ, E, Z) → (*g, a, b, z, e*) et, par conséquent, c_5 = AΓ = *gb*, d_5 = AB = *ga*. Cette exception est partiellement confirmée par l'examen du texte[243] et consonante avec le fait que le compendium, contrairement à Rabat 1101 mais comme l'Escorial 907[244], possède l'ajout à XIV **1/2**.

[239] Mais nous avons vu qu'il y a cependant quelques petites divergences dans les tracés des diagrammes de XIV **2/3**.
[240] Seul l'Escorial possède un diagramme "original" avec prolongements.
[241] Mais il ne faut pas oublier que nous ne connaissons pas le diagramme qui existait sans doute dans l'ancêtre de la famille de ***M*** (indentation vide).
[242] Voir *supra*, Tableau 4, note 184.
[243] Voir *supra*, Tableau 4, première partie de la note 51. Mais cf. la deuxième partie de ladite note !
[244] Voir *supra*, Tableau 4, note 55. Mais à noter que l'introduction de l'ajout, dans l'Escorial, n'a pas eu de conséquence sur le diagramme de XIV **1/2** !

(Received: April 15, 2011)